Stéphanie Lacroix

BTS
BUT
Licence

Abordez sereinement vos études supérieures en mathématiques

- Maîtrisez les essentiels
- Approfondissez vos acquis
- Améliorez vos notes avec des stratégies simples et efficaces

ellipses

Avant-propos

Vous allez démarrer votre première année universitaire, ou vous reprenez vos études après une période de pause. Vous avez bien le niveau baccalauréat ou un équivalent, mais peut-être que vos spécialités ne comportaient pas suffisamment de mathématiques pour que vous vous sentiez en confiance dans vos études, ou peut-être que vous pensez que votre niveau de mathématiques était trop juste.

Bravo pour avoir franchi le pas, et vous être procuré cet ouvrage ! Vous y trouverez tout ce dont vous avez besoin pour vous remettre à niveau, et vous rassurer pour aborder vos études avec sérénité.

J'ai effectué énormément de cours de mathématiques, principalement auprès d'étudiants, mais aussi d'élèves de lycée et collège. Or, le problème que je constate le plus souvent chez les étudiants de première année… c'est le manque de maîtrise des notions des années précédentes, notamment du collège. En effet, ces notions fondamentales sont apprises à un âge plutôt défavorable : c'est l'adolescence, le corps change, les émotions sont fortes et instables, les préoccupations sont rarement tournées en priorité vers les études, et l'établissement scolaire est plutôt vécu comme un lieu de lien social, au détriment de l'apprentissage. Pour certains, des problèmes personnels peuvent se rajouter à cette situation générale : difficultés familiales, ou autres. Ainsi, des notions simples mais importantes (comme par exemple les fractions) ne sont pas totalement comprises, et deviennent une gêne désagréable dans les chapitres de lycée ou d'université.

J'ai une bonne nouvelle pour vous : il vous sera beaucoup plus facile de maîtriser ces notions maintenant, du fait de votre âge et de votre maturité qui ont avancé. Vous constaterez que ce qui vous paraissait nébuleux à l'âge de treize ans… devient facile aujourd'hui ! À condition bien sûr d'investir un court mais intense moment de concentration sur ces sujets. C'est ce que je vous propose ici.

Bien entendu, cet ouvrage n'a pas pour vocation de reprendre tout le programme de secondaire. J'ai sélectionné les chapitres et les connaissances vraiment nécessaires, pour que vous puissiez aborder avec efficacité les nouveaux chapitres proposés en BTS et en BUT, tout en étant à l'aise avec les bases sur lesquelles ils s'appuient.

Ainsi, les deux premières parties reprennent les notions mathématiques les plus importantes pour bien aborder les études. La première partie est consacrée aux chapitres incontournables et essentiels, à connaître dès le début d'année. La deuxième partie est plutôt de l'approfondissement ; en fonction de votre filière, vous pouvez aussi vous en servir comme soutien pendant votre première année d'études. Chaque chapitre comporte : des explications concrètes de cours, des exercices corrigés, puis un résumé de cours (avec une carte mentale quand cela est pertinent), et un test vous permettant de vous évaluer.

Faites l'effort de chercher les solutions avant de regarder les réponses… même si vous rencontrez des difficultés, c'est le fait de chercher qui vous permettra de construire des bases solides. Est-ce que cela vous paraîtrait naturel de réparer une voiture juste après avoir lu un livre de mécanique ? Non, bien sûr… C'est le fait de mettre les mains dans le moteur avec un professionnel pour vous accompagner, qui vous permettrait d'apprendre comment faire progressivement, par des mises en pratique. Pour les mathématiques, c'est le même principe : comprendre le cours, c'est un bon début, mais cela ne suffit pas. Il faut l'appliquer, et s'autoriser à passer par des erreurs pour construire son expérience…

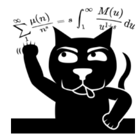
La troisième partie est consacrée à des méthodes et des conseils pour améliorer vos notes, gagner en efficacité, et prendre confiance en vous. En effet, en accompagnant de nombreux élèves en cours particuliers, j'ai constaté que certaines difficultés revenaient fréquemment, et que des méthodes de travail simples pouvaient améliorer considérablement les notes dans beaucoup de cas. Un de mes élèves est passé de 6 à 20 en quelques mois… simplement en appliquant l'un de ces conseils. Je vous partagerai tout cela dans la troisième partie de l'ouvrage. De bonnes habitudes sont la clé pour employer votre temps de manière ciblée et efficace, et obtenir enfin des notes correspondant à vos efforts !

Les essentiels I

1. Pourcentages

Les pourcentages constituent une base nécessaire pour de nombreux chapitres tels que statistiques, probabilités, équations, calculs et fonctions.
Ils ont des applications évidentes dans la vie quotidienne (grâce à ce chapitre, vous pourrez vérifier qu'un magasin vous facture le bon prix !), ainsi qu'en économie, gestion, et dans les filières scientifiques et techniques pour quantifier des erreurs sur des mesures ou du matériel.

Les bases



Un pourcentage représente une proportion d'une quantité, par rapport à 100 : « pourcent » = « pour cent », autrement dit : sur 100 ou divisé par 100.

Pour calculer un pourcentage d'une quantité, il faut donc **multiplier** la **quantité** par ce **pourcentage** et **diviser par 100**.

Exemple : pour calculer 20% de 50 € :
$50 \times 20\,\% \ = \ 50 \times \frac{20}{100} \ = \ 50 \times 0{,}20 \ = \ 10$ donc la réponse est 10 €.

C'est à vous !

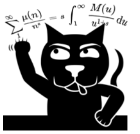
A1. Alexis a 530 € d'économies et décide d'en placer 15% en cryptomonnaie. Quelle somme cela représente-t-il ?

A2. Léa a 20 minutes de trajet chaque matin pour aller sur le campus, dont 30% s'effectue à pied. Combien de temps cela représente-t-il ?

A3. Une machine à découper des pièces de tissu a une marge d'erreur de 0,5%. Sur une longueur de 1,20 m, combien représente la marge d'erreur ?

Corrigés page 13

Diminuer ou augmenter d'un pourcentage



Nous allons nous entraîner à calculer des augmentations et des diminutions à l'aide de la méthode du **coefficient multiplicateur**. C'est une méthode plus directe et plus rapide que celle enseignée au collège (basée sur les tableaux de proportionnalité).

• Pour **diminuer** une quantité d'un pourcentage P, on calcule le coefficient multiplicateur C **en enlevant le pourcentage au nombre 1** : $C = 1-\dfrac{P}{100}$; puis on **multiplie** la quantité par ce coefficient.

Exemple : pour enlever 20% de 50 € :
$C = 1-\dfrac{20}{100} = 1-0{,}20 = 0{,}80$ puis $50\times 0{,}80 = 40$ donc on obtient 40 €.

• Pour **augmenter**, c'est le même principe en **additionnant** le pourcentage : $C = 1+\dfrac{P}{100}$; puis on **multiplie** la quantité par ce coefficient.

Exemple : pour augmenter 40 € de 15% : $C = 1+\dfrac{15}{100} = 1{,}15$;
$40\times 1{,}15 = 46$ donc le nouveau prix est 46 €.

Pour comprendre comment est construit le coefficient multiplicateur (facultatif ! Vous pouvez très bien apprendre la méthode ci-dessus sans aller plus loin) :

Avec une méthode intuitive, pour diminuer une quantité d'un pourcentage, on calcule d'abord le pourcentage de cette quantité, puis on soustrait le résultat obtenu à celle-ci.

Exemple : pour enlever 20% de 50 €, on calcule :
$$50-50\times 20\,\% = 50-50\times\frac{20}{100} = 50-50\times 0{,}20 = 50-10 = 40$$
donc on obtient 40 €.

C'est comme si on prenait 100% des 50 € et qu'on enlevait 20% des 50 €.

En fait, c'est comme multiplier 50 € par $(100\,\% - 20\,\%)$, ce qui correspond au coefficient : $C = 100\% - 20\% = \frac{100}{100} - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.

Le « 1 » de la formule $C = 1 - \frac{P}{100}$ correspond donc aux 100% qu'on « garde ».

C'est à vous !

A4. Une jupe coûtant initialement 27,99 € bénéficie de 40% de soldes. Quel est son nouveau prix ?

A5. Un client achète pour 130,50 € d'articles dans un supermarché, et bénéficie d'une réduction de 2,5%. Quel est le montant de son achat avec la réduction ?

A6. Un canapé coûtant 650 € augmente de 12% en raison de la hausse du prix des matières premières. Quel est son nouveau prix ?

A7. Un patron décide d'augmenter un de ses employés de 3%. Son salaire était de 1500 €. Quel est le nouveau salaire de l'employé ?

A8. Un placement bancaire offre un taux d'intérêt annuel de 1,5%. Quelle sera la somme obtenue au bout d'un an pour un placement de 450 € ?

Corrigés page 13

Autres applications du coefficient

• *Pour* ***retrouver la quantité initiale*** *(quantité de départ), quand on connaît la quantité finale et le pourcentage.*

Il suffit de **calculer le coefficient**, comme avant, puis de **diviser** au lieu de multiplier.

Exemple : un lave-linge coûte 852,50 € après une augmentation de 10%. Quel était son ancien prix ?

Réponse : une augmentation de 10% correspond à un coefficient :
$C = 1+\dfrac{10}{100} = 1+0{,}10 = 1{,}10.$
On calcule : $852{,}50 \div 1{,}10 = 775$.
L'ancien prix était de 775 €.

• *Pour* ***retrouver le pourcentage****, quand on connaît la quantité initiale et la quantité finale.*

On **divise la quantité finale par la quantité initiale**, puis on déduit le pourcentage à partir du coefficient obtenu, en **soustrayant 1** puis en remultipliant par 100.

Exemple : suite à une promotion, un article coûte 18 € au lieu de 25 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

Réponse : on divise la quantité finale (18), par la quantité de départ (25) : $18 \div 25 = 0{,}72$. Ce nombre correspond au coefficient multiplicateur.
À partir de celui-ci, on retrouve que $0{,}72-1 = -0{,}28$;
puis $-0{,}28 \times 100 = -28$;
il s'agit d'une réduction (puisque le nombre est négatif) de 28%.

Si on avait trouvé un coefficient plus grand que 1, donc un résultat final positif, il s'agirait d'une augmentation.

C'est à vous !

A9. Un salarié est rémunéré 1924 € suite à une augmentation de 4%. Quel était son salaire de départ ?

A10. Un magasin applique 30% de soldes. Quel était le prix d'escarpins soldés à 90,30 € ?

A11. Sur un site de vente entre particuliers, un article vendu 45 € est négocié à 42 €. Quel pourcentage de réduction cela représente-t-il ?

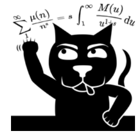
A12. Une pierre précieuse pèse 0,230 grammes. Pour l'ajuster à un bijou, le joaillier doit légèrement la réduire et ramène son poids à 0,224 grammes. De quel pourcentage a-t-il réduit la pierre ?

A13. Suite à une augmentation de 1,5%, un abonnement de téléphone passe à 24,87 € par mois. Quel était le prix de l'abonnement avant l'augmentation ?

A14. Un fabricant de café change son conditionnement. Les nouveaux paquets contiennent 267 grammes de café au lieu de 250 grammes. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Corrigés page 14

Intérêts composés



La plupart des placements bancaires classiques fonctionnent par intérêts composés. Le principe est que chaque année, les intérêts viennent se rajouter à la somme placée, et sont pris en compte dans les calculs des intérêts suivants.
Ainsi, pour calculer des **intérêts composés**, on doit **multiplier** la somme placée par le **même coefficient** plusieurs années de suite. Cela revient à effectuer un calcul de **puissance**.

Exemple : Anna place 1500 € sur un livret rapportant 2% d'intérêts annuels.
Le coefficient multiplicateur est donc : $C = 1+\frac{2}{100} = 1+0{,}02 = 1{,}02$.
Au bout d'un an : elle aura $1500\times1{,}02 = 1530$
Au bout de deux ans : elle aura $1530\times1{,}02 = 1560{,}60$
Au bout de trois ans : elle aura $1560{,}60\times1{,}02 \approx 1591{,}81$

C'est comme calculer directement :

$$1500\times1{,}02\times1{,}02\times1{,}02 = 1500\times1{,}02^3$$

La formule générale de calcul est :

$$Somme\ obtenue = somme\ placée\times coefficient^{nombre\ d'années}$$

C'est à vous !

A15. Naomie place ses économies de 2400 € sur une formule bancaire à 3,5% par an pendant 5 ans. Quelle somme obtient-elle au bout des 5 ans ?

A16. Une banque offre 4% d'intérêts par an si une somme reste bloquée pendant 10 ans. Quelle somme obtiendra-t-on si on place 1500 € ?

Corrigés page 14

Pourcentages - corrigés des exercices

A1. $530 \times \frac{15}{100} = 79{,}5$. Il place 79,50 € en cryptomonnaie.

A2. $20 \times \frac{30}{100} = 6$. Elle marche 6 minutes.

A3. $1{,}20 \times \frac{0{,}5}{100} = 0{,}006$
La marge d'erreur est de 0,006 mètres soit 6 millimètres.

A4. $C = 1 - \frac{40}{100} = 0{,}6$; $27{,}99 \times 0{,}6 = 16{,}794 \approx 16{,}79$
Le nouveau prix est 16,79 €.

A5. $C = 1 - \frac{2{,}5}{100} = 0{,}975$; $130{,}50 \times 0{,}975 = 127{,}2375 \approx 127{,}24$
Le client paiera 127,24 € au lieu de 130,50 €.

A6. $C = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$; $650 \times 1{,}12 = 728$
Le nouveau prix du canapé est 728 €.

A7. $C = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$; $1500 \times 1{,}03 = 1545$
Le salaire actualisé est de 1545 €.

A8. $C = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$; $450 \times 1{,}015 = 456{,}75$
La somme avec intérêts sera de 456,75 €.

A9. $C = 1+\frac{4}{100} = 1{,}04$; $1924 \div 1{,}04 = 1850$

Le salaire de départ de l'employé était de 1850 €.

A10. $C = 1-\frac{30}{100} = 0{,}70$; $90{,}30 \div 0{,}70 = 129$

Les escarpins non soldés coûtaient 129 €.

A11. $42 \div 45 \approx 0{,}93$; $0{,}93-1 = -0{,}07$; $-0{,}07 \times 100 = -7$

Cela représente une diminution de 7%, environ (car on a arrondi le premier calcul).

A12. $0{,}224 \div 0{,}230 \approx 0{,}9739 \approx 0{,}974$ (on arrondit au plus proche)

$0{,}974 - 1 = -0{,}026$; $-0{,}026 \times 100 = -2{,}6$.

La pierre a été réduite de 2,6%.

A13. $C = 1+\frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$; $24{,}87 \div 1{,}015 \approx 24{,}50$

Le prix de l'abonnement était de 24,50 € avant l'augmentation.

A14. $267 \div 250 = 1{,}068$; $1{,}068-1 = 0{,}068$; $0{,}068 \times 100 = 6{,}8$

Le conditionnement des paquets a augmenté de 6,8%.

A15. $C = 1+\frac{3{,}5}{100} = 1{,}035$; $2400 \times 1{,}035^5 \approx 2850{,}45$

Elle disposera de 2850,45 € au bout de 5 ans.

A16. $C = 1+\frac{4}{100} = 1{,}04$; $1500 \times 1{,}04^{10} \approx 2220{,}37$

La somme obtenue sera de 2220,37 €.

Vérifiez bien vos réponses, puis passez au résumé de cours et au test !

Pourcentages : résumé

• Pour calculer un pourcentage d'une quantité, il faut **multiplier** la **quantité** par ce **pourcentage** et **diviser par 100 :**

$$résultat = quantité \times \frac{P}{100}$$

• Pour calculer une **diminution** (réduction, soldes…) :
- on calcule le **coefficient** $C = 1-\frac{P}{100}$,
- on **multiplie** la quantité par ce coefficient.

• Pour calculer une **augmentation** :
- on calcule le **coefficient** $C = 1+\frac{P}{100}$,
- on **multiplie** la quantité par ce coefficient.

• Pour **retrouver la quantité de départ**, connaissant la quantité finale et le pourcentage :
- on calcule le **coefficient** $C = 1-\frac{P}{100}$ pour une diminution ou $C = 1+\frac{P}{100}$ pour une augmentation,
- on **divise** la quantité finale par le coefficient.

• Pour **retrouver le pourcentage appliqué** :
- on divise la quantité finale par la quantité initiale,
- on soustrait 1 au résultat,
- on multiplie par 100 pour exprimer le résultat en pourcentage. Si le nombre est négatif, c'est une diminution, s'il est positif c'est une augmentation.

• Pour calculer des **intérêts composés** :
- on calcule le coefficient d'augmentation $C = 1+\frac{P}{100}$,
- on multiplie la somme placée par ce coefficient puissance le nombre d'années :

$$Somme\ obtenue = somme\ placée \times coefficient^{nombre\ d'années}$$

Pourcentages – test

QCM – Quelle est la bonne réponse à chaque question ?

1. 30% de 10 € représentent :
a) 0,30 € b) 3 € c) 30 € d) 7 €

2. Vous effectuez une recette prévue pour 8 personnes, mais pour 6 personnes. Vous devez multiplier les quantités par :
a) 1,33 b) 1,25 c) 0,75 d) 0,66

3. Suite à des travaux routiers, un trajet de bus augmente de 25%. Au lieu de passer 16 minutes dans le bus, vous allez parcourir le trajet en :
a) 4 minutes b) 18 minutes c) 20 minutes d) 25 minutes

Exercices – posez les calculs et concluez !

4. Un article coûtant 45,99 € est soldé à - 20%. Quel est son nouveau prix ?
On arrondira à deux chiffres après la virgule.

5. Lorsque l'eau se transforme en glaçon, son volume augmente d'environ 10%. Si on met au congélateur une bouteille remplie de 1,5 litres d'eau (soit 1,5 dm^3), quel sera le volume de l'eau gelée ?

6. Après une augmentation de 5%, un ordinateur coûte 561,75 €. Quel était son prix initial ?

7. Un meuble coûtant 1550 € est cédé à 1271 €. Le vendeur assure que la promotion est de 20%. A-t-il raison ? Sinon, quel est le pourcentage de promotion ?

8. On découpe une pièce de bois de 11,04 m^2 à partir d'une plaque de 12 m^2. Quel est le pourcentage de perte de surface de bois ?

9. Élodie place 3800 € sur un livret bancaire, à un taux de 1,7% par an. Si elle ne retire pas d'argent pendant 8 ans, quel montant indiquera son livret au bout des 8 ans ?

10. Jérémy place 4500 € sur un livret bancaire au taux de 2% par an. Il pense atteindre 5000 € au bout de 5 ans. A-t-il raison ?

Corrigés page 94

Bravo pour avoir terminé ce chapitre consacré aux pourcentages ! Pour bien assimiler ces connaissances, et si certaines notions étaient nouvelles pour vous, prenez le temps de relire régulièrement le résumé et les exercices, afin de mémoriser les méthodes utilisées.

2. Probabilités simples

Les probabilités ont été vues en filière générale et en bac pro. Le chapitre lui-même a des applications limitées dans la vie courante (sauf pour les amateurs de jeux de hasard), mais est important à maîtriser car il sert de base pour des calculs de probabilités avancés, au programme de beaucoup de BTS et BUT.

Ces chapitres avancés, que vous verrez avec vos enseignants du supérieur, permettent notamment de mesurer la fiabilité d'une production industrielle, et de prévoir des intervalles de confiance, par exemple pour des garanties de matériel.

D'autres applications des probabilités avancées concernent des études de données, comme la fameuse courbe en cloche de la loi normale qui peut s'appliquer dans de nombreux domaines (répartition de population, études statistiques, etc.)

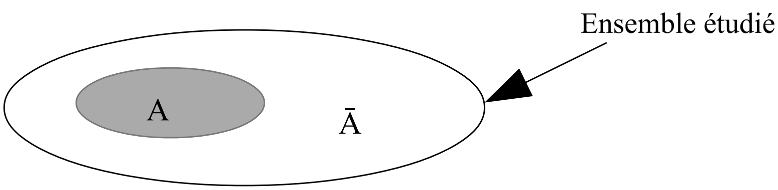
Il est donc essentiel de maîtriser ces bases, pour pouvoir aborder sereinement les futurs chapitres, plus proches du domaine professionnel. Les compétences développées ici sont plutôt liées à la compréhension des énoncés et au vocabulaire à assimiler, les réponses comportant très peu de calcul.

Opérations de base des ensembles

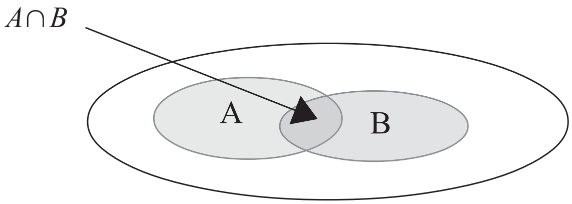
Les probabilités se basent sur les notions d'ensembles, chaque ensemble correspondant à une caractéristique particulière. La compréhension de quelques principes sur les ensembles est donc nécessaire.

Pour deux ensembles A et B, on définit ce qui suit.

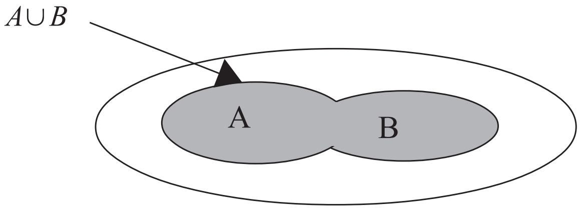
- $\bar{A}$ (lire « A barre ») est l'ensemble **contraire** de A.



• $A \cap B$ (lire « A inter B ») est l'**intersection**, ce sont les éléments qui font partie à la fois de A **et** de B.



• $A \cup B$ (lire « A union B ») est l'**union**, ce sont les éléments qui font partie de A **ou** de B, c'est-à-dire soit A, soit B, soit les deux.



Retenez bien la signification des mots « et », « ou », dans ce contexte. Elle n'est pas intuitive ni sujette à interprétation comme elle peut l'être dans la langue française : ici **« et » représente l'intersection**, **« ou » représente l'union**. C'est un point crucial pour bien interpréter les énoncés des exercices.

Exemple : considérons l'ensemble total des vêtements d'une armoire. Soit A l'ensemble des paires de chaussettes, et B l'ensemble des vêtements de sport.

- $\bar{A}$ représente tous les vêtements qui ne sont pas des paires de chaussettes,
- $A \cap B$ représente les paires de chaussettes de sport,
- $A \cup B$ contient les paires de chaussettes avec les vêtements de sport.

Nous pouvons maintenant calculer des probabilités à partir de ces ensembles, à l'aide de la formule intuitive : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments dans A}}{\text{nombre d'éléments au total}}$

On comprend également que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, puisque $\bar{A}$ contient tous les éléments n'étant pas dans A.

Dans l'exemple, si l'armoire contient 150 vêtements dont 10 paires de chaussettes, et si on prend un vêtement au hasard (en fermant les yeux…), la probabilité de prendre une paire de chaussettes est : $P(A) = \dfrac{10}{150}$.

On pourra ensuite simplifier la fraction (voir plus loin le chapitre sur les fractions), ou calculer une valeur décimale approchée, ici $P(A) = \frac{10}{150} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$.

La probabilité de prendre autre chose qu'une paire de chaussettes est :

$$P(\overline{A}) = \frac{140}{150} = 1 - P(A) \approx 0{,}933.$$

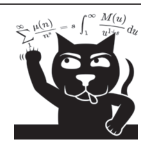
Notez bien qu'**une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1 !** Si dans un exercice vous trouvez un résultat plus grand que 1, vérifiez votre raisonnement et vos calculs…

Dans l'exemple, on ne peut pas avoir plus de paires de chaussettes, que le total des vêtements, dans l'armoire. Donc on divise forcément un nombre inférieur ou égal à 150, par le total 150, ce qui donne un résultat inférieur ou égal à 1.

Remarque : si l'énoncé nous demande d'exprimer la probabilité sous forme de pourcentage, on multiplie le résultat par 100. Le résultat reste techniquement plus petit que 1, car un pourcentage est une division par 100 (voir chapitre précédent).

Nous allons maintenant préciser comment représenter des situations de probabilités courantes. Ces représentations serviront de base à nos calculs.

Représentation et calcul des situations de probabilités



Une situation de probabilité peut être représentée par :

- des ensembles (voir ci-dessus),
- un **tableau** détaillant le nombre d'éléments par sous-ensemble et les totaux,
- un **arbre pondéré**.

En général, dans l'énoncé, on vous suggérera la représentation la plus adaptée à la situation.

Par la suite, en vous basant sur la représentation complète de la situation, vous pourrez répondre aux questions et effectuer les calculs en choisissant les bonnes données.

Attention à un piège courant : pour calculer la probabilité d'un événement $A \cup B$, il ne faut pas simplement ajouter la probabilité de A et celle de B, sinon on va compter les éléments communs en double ! Il faut ajouter la probabilité de A et celle de B puis soustraire la probabilité des éléments communs, soit $A \cap B$.

Cela donne la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

NB : lorsque deux événements ont une intersection vide, ils sont **incompatibles**. Dans ce cas, $P(A \cap B) = 0$.

Exemple de tableau :

Les 500 élèves d'un établissement doivent s'inscrire à un sport, au choix parmi badminton, escalade et natation. Chaque sport comporte l'option compétiteur ou amateur. 230 élèves sont inscrits comme compétiteurs. 110 élèves pratiquent le badminton dont 10 compétiteurs, et sur les 180 inscrits à la natation, 50 pratiquent en amateur.

Pour résoudre cet exercice, nous construisons un tableau représentant chaque possibilité, puis nous reportons les nombres indiqués dans l'énoncé (ci-dessous, en gras), dans la bonne case.

Ensuite, en utilisant les totaux, nous pouvons déduire les nombres manquants.

Par exemple, sur le total de 500 élèves, dont 230 compétiteurs, on calcule $500 - 230 = 270$ amateurs au total.

	B : badminton	E : escalade	N : natation	TOTAL
C : compétiteur	**10**	90	130	**230**
A : amateur	100	120	**50**	270
TOTAL	**110**	210	**180**	**500**

On peut alors calculer :

- la probabilité qu'un élève au hasard pratique la natation : $P(N) = \dfrac{180}{500} = 0{,}36$

- la probabilité qu'un élève au hasard pratique le badminton en compétition : $P(B \cap C) = \dfrac{10}{500} = 0{,}02$. Avec la notation des ensembles, c'est bien l'intersection de l'activité badminton avec l'option compétiteur.

- la probabilité qu'un élève soit amateur, ou pratique l'escalade. Rappelez-vous, le mot « ou » représente l'opération union. Il faut donc calculer $P(A \cup E)$.

En utilisant la formule de calcul,

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{270+210-120}{500} = \frac{360}{500} = 0{,}72.$$

Comme cela a été dit en début de chapitre, l'aspect calculatoire est assez facile en probabilités.

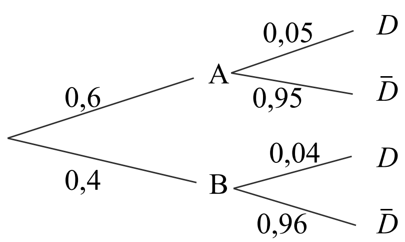
Il faut surtout : comprendre et interpréter correctement l'énoncé, utiliser et écrire explicitement la bonne notation, par exemple « $P(A \cup E)$ », et poser le calcul clairement avant de donner le résultat.

Exemple d'arbre :

Une usine produit des figurines dans deux ateliers A et B. 60% des figurines sont produites dans l'atelier A. La probabilité qu'une figurine présente un défaut est de 5% dans l'atelier A, et 4% dans l'atelier B.

Nous représentons cette situation par un arbre dont les branches sont associées à la probabilité correspondante. Les probabilités manquantes sont calculées selon la règle suivante : chaque embranchement doit représenter un total de 1.

On notera D l'événement « présenter un défaut », $\bar{D}$ l'événement contraire sera donc « ne pas présenter de défaut ».



Explications sur les nombres : 60% de la production se fait dans l'atelier A, donc la probabilité indiquée est $\frac{60}{100} = 0{,}6$. On en déduit la production dans l'atelier B : $1-0{,}6 = 0{,}4$. C'est le même principe ensuite pour D et $\bar{D}$.

Remarque : dans ce cas, on aurait pu noter $\bar{A}$ à la place de B, car l'usine ne comporte que deux ateliers.

Calculs : dans le cas d'un arbre, pour calculer les probabilités, on va **multiplier** les nombres présents **sur les branches successives** en comptant bien tous les niveaux.

Ainsi, pour calculer $P(A \cap D)$, on suit la branche A puis la branche D, et on multiplie : $P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03$.

Pour calculer une probabilité composée de plusieurs possibilités, on va procéder de la même manière sur toutes les branches concernées, et ajouter les résultats.

Ainsi pour calculer la probabilité d'avoir une figurine sans défaut :

$$P(\bar{D}) = P(A \cap \bar{D}) + P(B \cap \bar{D})$$
$$P(\bar{D}) = 0{,}6 \times 0{,}95 + 0{,}4 \times 0{,}96 = 0{,}57 + 0{,}384 = 0{,}954.$$

C'est à vous !

B1. Une usine fabrique chaque jour 800 vêtements : 400 pantalons, des T-shirts et des gilets. 90% de sa production se fait à Nantes et le reste à Bordeaux. L'atelier de Nantes fabrique chaque jour 150 gilets et 200 T-shirts ; l'atelier de Bordeaux fabrique 30 gilets.

a. Compléter ci-dessous le tableau représentant la situation :

	P : pantalon	T : T-shirt	G : gilet	TOTAL
N : Nantes				
B : Bordeaux				
TOTAL				

b. Si on prend un vêtement au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit fabriqué à Bordeaux ?

c. Quelle est la probabilité que le vêtement soit un gilet ?

d. Quelle est la probabilité que le vêtement soit un T-shirt fabriqué à Bordeaux ?

e. Quelle est la probabilité que le vêtement soit un T-shirt ou fabriqué à Nantes ?

f. Citer deux événements incompatibles.

B2. Une entreprise vend sur internet des bougies, de l'encens, et des parfums d'ambiance. 60% des clients achètent des bougies, et 30% de l'encens. Au moment où les clients vont valider leur achat, l'entreprise leur propose un porte-encens à tarif réduit. La probabilité d'acheter le porte-encens est de 90% pour les clients ayant acheté de l'encens, 40% pour ceux ayant acheté des bougies, et 5% pour ceux ayant acheté du parfum d'ambiance.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

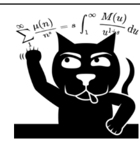
b. Quelle est la probabilité qu'un client achète un parfum d'ambiance ?

c. Quelle est la probabilité qu'un client achète de l'encens et le porte-encens ?

d. Quelle est la probabilité qu'un client au hasard achète le porte-encens ?

Corrigés page 25

Probabilités conditionnelles



Pour les probabilités conditionnelles, les raisonnements sont les mêmes. On va simplement calculer les probabilités **par rapport à un sous-ensemble**, et non plus par rapport au total.

On note $P_E(A)$ la probabilité de l'événement A « **sachant** » l'événement E, ou « parmi » l'événement E.

On la calcule avec une formule similaire :

$$P_E(A) = \frac{\text{nombre d'éléments dans A et E}}{\text{nombre d'éléments dans E}}$$

Important : si la probabilité de l'événement A est la même : sachant E, ou pour tout l'ensemble étudié, on dira que A et E sont **indépendants**.

En langage mathématique : si $P_E(A) = P(A)$, A et E sont indépendants.

C'est à vous !

B3. On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte. Soient les événements : N : tirer une carte noire ; T : tirer un trèfle ; V : tirer un valet.

a. Calculer les probabilités des événements N, T et V.

b. Que représente $P_T(V)$? Calculer sa valeur.

c. Que représente $P_N(T)$? Calculer sa valeur.

d. Les événements V et T sont-ils indépendants ?

e. Les événements N et T sont -ils indépendants ?

B4. Un coiffeur a 200 clients cette semaine. 50% demandent une coupe de cheveux, 35% une coloration et le reste un brushing. Les clients peuvent choisir de prendre en plus un soin capillaire après leur shampooing : cette option est choisie par 20% des clients qui demandent une coupe, 80% pour la coloration et 70% pour le brushing.

a. Représenter la situation par un tableau.

	C : coupe	L : couleur	B : brushing	TOTAL
S : soin				
P : pas de soin				
TOTAL				

b. Quelle est la probabilité qu'un client au hasard ait choisi le soin capillaire ?

c. Quelle est la probabilité qu'un client parmi ceux qui ont fait un brushing ait choisi le soin capillaire ?

d. Les événements « faire un brushing » et « choisir le soin capillaire » sont-ils indépendants ?

Corrigés page 26

Vérifiez bien vos réponses, et prenez le temps d'apprendre le vocabulaire (voir le résumé plus loin). Rappelez-vous que les mots de vocabulaire, en probabilités, ne s'interprètent pas comme dans le langage courant. Ils ont une signification mathématique précise, et se traduisent par une opération ou une formule.

Probabilités - corrigés des exercices

B1. a.

	P : pantalon	T : T-shirt	G : gilet	TOTAL
N : Nantes	370	**200**	**150**	**720** (90%)
B : Bordeaux	30	20	**30**	80
TOTAL	**400**	220	180	**800**

b. $P(B) = \dfrac{80}{800} = 0{,}1$

c. $P(G) = \dfrac{180}{800} = 0{,}225$

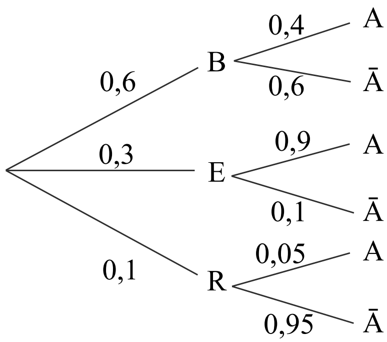
d. $P(T \cap B) = \dfrac{20}{800} = 0{,}025$

e. $P(T \cup N) = P(T) + P(N) - P(T \cap N) = \dfrac{220+720-200}{800} = \dfrac{740}{800}$

$P(T \cup N) = 0{,}925$

f. Deux événements incompatibles sont par exemple : « le vêtement est fabriqué à Nantes » et « le vêtement est fabriqué à Bordeaux ».

B2. a.



On utilise B pour bougie,
E pour encens,
R pour parfum (P étant réservé),
A pour l'achat du porte-encens.

b. $P(R) = 0{,}1$

c. $P(E \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}27$

d. $P(A) = P(B \cap A) + P(E \cap A) + P(R \cap A)$

$P(A) = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}24 + 0{,}27 + 0{,}005 = 0{,}515$

La probabilité qu'un client achète le porte-encens est de 0,515 ou 51,5%.

B3. **a.** $P(N) = \dfrac{16}{32} = 0{,}5$; $P(T) = \dfrac{8}{32} = 0{,}25$; $P(V) = \dfrac{4}{32} = 0{,}125$

b. $P_T(V)$ est la probabilité de tirer un valet parmi les trèfles.

$P_T(V) = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

c. $P_N(T)$ est la probabilité de tirer un trèfle parmi les cartes noires.

$P_N(T) = \dfrac{8}{16} = 0{,}5$

d. $P_T(V) = P(V) = 0{,}125$ donc oui, les événements « tirer un trèfle » et « tirer un valet » sont indépendants.

e. $P_N(T) \neq P(T)$ donc les événements « tirer un trèfle » et « tirer une carte noire » ne sont pas indépendants.

B4. **a.** Pour remplir le tableau, on doit calculer les pourcentages sur le total de 200 clients pour la ligne du bas, puis les pourcentages de la ligne « soin » par rapport aux sous-totaux de la ligne du bas.

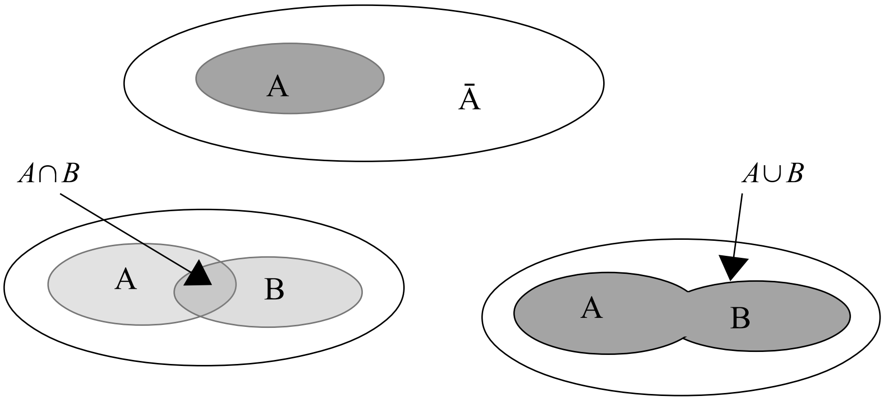
	C : coupe	L : couleur	B : brushing	TOTAL
S : soin	20	56	21	97
P : pas de soin	80	14	9	103
TOTAL	100	70	30	200

b. $P(S) = \dfrac{97}{200} = 0{,}485$ ou 48,5%.

c. $P_B(S) = \dfrac{21}{30} = 0{,}7$ ou 70%.

d. $P_B(S) \neq P(S)$ donc les événements ne sont pas indépendants.

Probabilités : résumé



- « et » = intersection, « ou » = union
- $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments dans A}}{\text{nombre d'éléments au total}}$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B$ est vide, A et B sont **incompatibles**, et $P(A \cap B) = 0$.
- **Savoir construire un arbre et un tableau** (revoir les exemples si besoin).

Probabilités conditionnelles :

- $P_E(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments dans A et E}}{\text{nombre d'éléments dans E}}$

$P_E(A)$ est la probabilité de A **sachant** E ou parmi E.

- Si $P_E(A) = P(A)$, A et E sont **indépendants**.

Probabilités – test

QCM – Quelle est la bonne réponse à chaque question ?

1. Un sac contient 4 boules rouges et 5 boules vertes. On tire au hasard une boule du sac. Les événements « tirer une boule rouge » et « tirer une boule verte » sont :
a) indépendants b) interdits c) incompatibles

2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit l'événement A « tirer une dame ou un carreau ». $\overline{A}$ contient :
a) 21 cartes b) 28 cartes c) 24 cartes d) 20 cartes

3. On lance un dé non truqué à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir « 2 » sachant qu'on a obtenu un nombre pair ?
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

4. Exercice

Dans une cafeteria, on propose trois plats principaux au choix : lasagnes au tofu, dahl indien, et légumes sautés, et deux desserts au choix : salade de fruits, et cookie au chocolat.

40% des clients choisissent les lasagnes, et parmi eux 80% prennent la salade de fruits en dessert. 35% des clients choisissent le dahl, et parmi eux 60% prennent le cookie. Les clients ayant choisi les légumes choisissent le cookie à 90%.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité qu'un client choisisse la salade de fruits parmi ceux ayant choisi le dahl ?

c. Quelle est la probabilité qu'un client choisisse la salade de fruits, parmi tous les clients ?

d. Les événements « choisir le dahl » et « choisir la salade de fruits » sont-ils indépendants ?

Corrigés page 95

3. Équations basiques et calcul littéral

Ce chapitre a des applications concrètes dans la vie courante, comme par exemple retrouver une quantité qui n'est pas calculable de manière directe. Mais la plupart des compétences développées ici seront utilisées dans d'autres chapitres, comme les fonctions, les simplifications de calculs techniques, ou autres.

Le calcul littéral consiste à remplacer, dans une expression mathématique, une quantité inconnue par une lettre (« lettre » et « littéral » sont de la même famille de mots). En général, on utilise la lettre x, mais bien sûr n'importe quelle lettre de l'alphabet (français, grec, ou autre) peut être utilisée.

Nous verrons dans cet ouvrage deux applications importantes :

- la résolution d'équations,
- l'étude de fonctions.

• *Exemple de mise en équation* : Louis achète un pull à 59 € et 3 paires de chaussettes. Le total payé est de 72,50 €. Retrouver le prix d'une paire de chaussettes.

Méthode : on appelle x le prix d'une paire de chaussettes, c'est la quantité inconnue que l'on recherche.
Puis on traduit l'énoncé par une formule mathématique : ici $59+3x = 72{,}50$.
On peut alors résoudre l'équation (méthode ci-dessous).

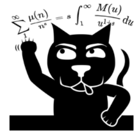
• *Exemple de fonction* : le coût de fabrication d'un vêtement comprend un coût fixe de 400 € pour l'entreprise qui le fabrique, et un coût de matières premières et main d'œuvre de 18,70 € par vêtement. Quelle est la formule de la fonction représentant ce coût ?

Méthode : on appelle x le nombre de vêtements fabriqués.
Selon l'énoncé, la fonction représentant le coût est donnée par la formule : $C(x) = 400+18{,}7x$. On pourra par exemple :

- calculer le coût de fabrication de 10 vêtements, en remplaçant x par 10 :
$$C(10) = 400+18{,}7\times 10 = 587$$
- tracer la représentation graphique de la fonction sur la calculatrice,
- étudier cette fonction (voir plus loin le chapitre consacré à ce sujet).

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la résolution des équations les plus courantes, et pour cela nous aurons besoin des principales règles de développement des expressions, rappelées ci-dessous.

Pour simplifier des écritures avec parenthèses



Il existe différentes règles pour enlever des parenthèses ; le choix de la règle à appliquer dépend du **signe** qui se trouve **juste avant** la parenthèse :

- si c'est un signe $+$, on enlève les parenthèses sans rien changer :

- $3x+(1-2x) = 3x+1-2x = x+1$
- $2+(-3x+4) = 2-3x+4 = -3x+6$

Remarques importantes :

- dans la première étape, on enlève les parenthèses, puis si c'est possible dans une deuxième étape on ***réduit*** *(on regroupe les termes qui vont ensemble) ;*

- habituez-vous à présenter le résultat final en commençant par le terme en x comme ci-dessus ; si l'expression comporte des puissances de x on commence par la plus grande puissance et on écrit les termes de la plus grande à la plus petite puissance de x ;

- très important : si on déplace un terme, on garde avec lui ***le signe situé à sa gauche*** *!*

- si c'est un signe $-$, on enlève les parenthèses en transformant les $+$ en $-$ et les $-$ en $+$:

- $5-(1-2x) = 5-1+2x = 2x+4$
- $2-(-3x+4) = 2+3x-4 = 3x-2$

- si c'est une multiplication, on applique la distributivité simple :

- $5(1-2x) = 5\times(1-2x) = 5\times1+5\times(-2x) = -10x+5$
- $-10(-3+4x) = -10\times(-3)-10\times(4x) = -40x+30$

ou la double distributivité :

- $(5-3x)(1-2x) = 5\times1+5\times(-2x)-3x\times1-3x\times(-2x)$
  $= 5-10x-3x+6x^2 = 6x^2-13x+5$

- pour la division : on écrira plutôt les formules sous forme de fraction, et on utilisera les règles associées (voir plus loin).