PCSI

Nicolas Nguyen
Mathieu Fontes
Walter Damin
Christophe Jan

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

6e édition
+ exos-minutes

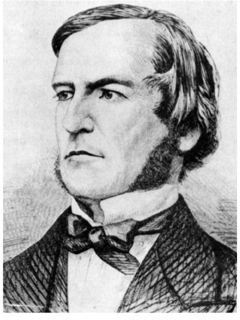
ellipses

Premier semestre

Chapitre 1

Logique et raisonnements

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement.

Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur.

Au tournant du XX^{e} siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- Manipuler les quantificateurs.
- Raisonner par implication ou par équivalence.
- Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

et plus si affinités

- Appliquer une récurrence forte.
- Raisonner par analyse-synthèse.

Résumé de cours

Rudiments de logique

Connecteurs logiques

Définition : *Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*La **négation** de P est la proposition, notée **non P**, définie par :*

- *non P est vraie lorsque P est fausse ;*
- *non P est fausse lorsque P est vraie.*

*La **conjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P et Q**, définie de la manière suivante :*

- *P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

*La **disjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P ou Q**, définie de la manière suivante :*

- *P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
- *P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*L'**implication** P entraîne Q est la proposition, notée $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ définie par non P ou Q.*
*L'**équivalence** de P et de Q est la proposition, notée $\boldsymbol{P \iff Q}$, définie par la conjonction $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.*

Vocabulaire : *La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit ≪ P implique Q ≫ ou encore ≪ **si** P **alors** Q ≫. La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit également ≪ P **si et seulement si** Q ≫.*

Remarques :

- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.
- Lorsque $P \iff Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q. Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Règles de calcul

Proposition 1.1.— Règles de calcul pour la conjonction, la disjonction —. Soit P, Q et R trois assertions. Alors

- $P \, ou \, Q \iff Q \, ou \, P$
- $(P \, ou \, Q) \, ou \, R \iff P \, ou \, (Q \, ou \, R)$
- $P \, ou \, (Q \, et \, R) \iff (P \, ou \, R) \, et \, (P \, ou \, R)$
- $P \, et \, Q \iff Q \, et \, P$
- $(P \, et \, Q) \, et \, R \iff P \, et \, (Q \, et \, R)$
- $P \, et \, (Q \, ou \, R) \iff (P \, et \, Q) \, ou \, (P \, et \, R)$

Proposition 1.2.— Règles de calcul pour la négation —. Soit P et Q deux assertions. Alors

- $non \ (non \ P) \iff P$
- $non \ (P \ et \ Q) \iff (non \ P) \ ou \ (non \ Q)$
- $non \ (P \ ou \ Q) \iff (non \ P) \ et \ (non \ Q)$
- $non \ (P \Rightarrow Q) \iff P \ et \ (non \ Q)$

Théorème 1.3.— Soit P et Q deux propositions.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \iff (non \ Q \Rightarrow non \ P)}$$

Vocabulaire : *L'implication non $Q \Rightarrow$ non P est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

■ Quantificateurs

Définition : *Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.*

- **Quantificateur universel :** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit :*

  $$\boxed{\forall x \in E, \ P(x)}$$

  *Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel** et se lit « **quel que soit** ».*

- **Quantificateur existentiel —.** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit :*

  $$\boxed{\exists x \in E, \ P(x)}$$

  *Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel** et se lit « **il existe** ».*

Proposition 1.4.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition $\forall x \in E, \ P(x)$ est : $\exists x \in E, \ non \ P(x)$.
- La négation de la proposition $\exists x \in E, \ P(x)$ est : $\forall x \in E, \ non \ P(x)$.

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

■ Modes de raisonnement

Théorème 1.5.— Soit P et Q des propositions.

- **Preuve par déduction**

• **Si** Q est vraie • **Si** $Q \Rightarrow P$ est vraie	**Alors** P est vraie

- **Preuve par disjonction de cas**

• **Si** $Q \Rightarrow P$ est vraie • **Si** $non(Q) \Rightarrow P$ est vraie	**Alors** P est vraie

- **Preuve par l'absurde**

• **Si** $non(P) \Rightarrow Q$ est vraie • **Si** $non(P) \Rightarrow non(Q)$ est vraie	**Alors** P est vraie

■ Raisonnement par récurrence

Théorème 1.6.— Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ —. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.7.— Principe de récurrence —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.8.— Récurrence double —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1))$ implique $\mathcal{P}(n+2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.9.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\Big(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}(n)\Big)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthodes

Démontrer une proposition

Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction
Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Or, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x-2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas
On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distinguant les cas n pair ou impair.

- Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair, on a $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.8, exercice 1.9.

Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde
Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.
Nous allons démontrer cette proposition en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leqslant N_0$; d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.12, exercice 1.15.

■ Démontrer une implication

> **❑ Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct**
> Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels, $x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| = |y|$.
Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x-y)(x+y) = 0$.
Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

> **❑ Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition**
> Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.3** :
>
> l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.
>
> Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication *non* $Q \Rightarrow$ *non* P est vraie. En pratique, on suppose donc que *non* Q est vraie et on montre que *non* P est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p+1$, où $p = 2k^2+2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ». Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1+x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1+x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.11

> **❑ Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde**
> L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition *non* P *ou* Q, sa négation est donc P *et non* Q.
> Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:
>
> - on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
> - on montre que cela aboutit à une contradiction.

Méthodes

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}^+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ **et** $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Il en résulte que $x(1+x) = y(1+y)$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y - x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x + y + 1 = 0$, donc $x + y = -1$. Absurde vu que x et y sont positifs ! leur somme ne saurait être négative. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

> ❑ **Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication**
> Par définition, l'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » est la proposition « $P \Rightarrow Q$ *et* $Q \Rightarrow P$ ». Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :
>
> - on démontre $P \Rightarrow Q$;
> - puis on démontre $Q \Rightarrow P$.
>
> Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\big(x + \frac{1}{m}\big),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur $\mathbb{R}$.
Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
On va raisonner par double implication.
• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.
Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

> ❑ **Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct**
> Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.

Remarque : Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations Notons qu'il n'est pas toujours possible d'appliquer cette méthode directe pour démontrer une équivalence. Il est parfois nécessaire de procéder par double implication (**méthode 1.7**).

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution (un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à une racine carrée). Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$2x = \sqrt{x^2+1} \iff (2x)^2 = (\sqrt{x^2+1})^2 \iff 4x^2 = x^2+1 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.10.

■ Utiliser un contre-exemple

> ❑ **Méthode 1.9.— Comment utiliser un contre-exemple**
> La négation de la proposition «$\forall x \in E, P(x)$» est «$\exists x \in E, non\ P(x)$».
> Si l'on souhaite démontrer qu'une proposition du type «$\forall x \in E, P(x)$» est fausse, il suffit de trouver une valeur de x de E pour laquelle la proposition $P(x)$ est fausse. On parle alors de **contre-exemple**.

Exemple : la fonction sinus n'est pas paire. Par exemple, $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$.

Exemple : la proposition « tout entier naturel est somme de trois carrés » est-elle vraie ?
On peut facilement vérifier que cette proposition est vraie pour tout entier $n \in \{0, \cdots, 6\}$. Par exemple, $0 = 0^2+0^2+0^2$ et $5 = 2^2+1^2+0^2$. En revanche, la proposition est fausse pour $n = 7$. Sinon, on pourrait écrire $7 = a^2+b^2+c^7$, avec nécessairement $a, b, c \in \{0, \cdots, 2\}$ (puisque $3^2 = 9$). Mais, avec trois des carrés 0^2, 1^2 et 2^2, il est impossible de former 7. Ainsi, 7 constitue un contre-exemple et la proposition énoncée est donc fausse.

Mise en œuvre : voir le Vrai/Faux.

■ Raisonner par analyse-synthèse

> ❑ **Méthode 1.10.— Comment raisonner par analyse-synthèse**
> Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Ce raisonnement se déroule en deux étapes.
>
> - Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
> - Phase de **synthèse** : on montre que ces conditions obtenues sont suffisantes et on résout le problème.
>
> En pratique, on démontre que, si x est solution du problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (phase d'analyse) ; on vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (phase de synthèse).

Méthodes

Exemple : montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Analyse. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on en déduit que $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
De même, en retranchant ces deux égalités, il vient $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.
Synthèse. Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.
• La fonction g est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

• La fonction h est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

• Enfin, on a $f = g + h$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (g, h), avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Mise en œuvre : exercice 1.13 et **exercice 1.14**.

■ Raisonner par récurrence

> ❑ **Méthode 1.11.— Comment appliquer une récurrence simple**
> Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **simple**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:
>
> - **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie au rang initial n_0 ;
> - **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la proposition est vraie au rang n ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
> - **Conclusion :** « par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. On déduit de cette hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1 \text{ ».}$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1\times 1! = 1$, $(1+1)! - 1 = 2-1 = 1$ et $1 = 1$.

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1.$$

D'après cette hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} 1\times 1! + \cdots + (n+1)\times(n+1)! &= 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! + (n+1)\times(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+n+1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.16, exercice 1.17, exercice 1.22, exercice 1.23.

❑ **Méthode 1.12.— Comment appliquer une récurrence double**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **double**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie aux deux rangs initiaux n_0 et n_0+1 ;
- **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$, où n est un entier fixé supérieur ou égal à n_0 (« on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+2$;
- **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4\times 2^{n+1} - 7\times 3^n$.
On effectue une récurrence double en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{«}u_n = 4\times 2^{n+1} - 7\times 3^n\text{».}$$

Méthodes

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1.$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = 16 - 21 = -5$.

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé, c'est-à-dire :

$$u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}.$$

En utilisant l'égalité donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n &= 5(4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n) \\ &= 20 \times 2^{n+2} - 35 \times 3^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} + 42 \times 3^n \\ &= 2^{n+1}(2 \times 20 - 24) + 3^n(42 - 35 \times 3) = 16 \times 2^{n+1} - 63 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^2 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^2 \times 3^n = 4 \times 2^{n+3} - 7 \times 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.18, exercice 1.19.

❑ **Méthode 1.13.— Comment appliquer une récurrence forte**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **forte**, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :** on suppose que la propriété est vraie du rang n_0 **jusqu'à** un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0+1, \cdots, n$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$;
- **Conslusion :** « Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n s'écrit comme un produit de nombres premiers ». Ici le rang initial n_0 est égal à 2.

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2$ et 2 est un nombre premier !

• **Hérédité :** Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire que tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ peut se décomposer en produit de nombres premiers. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers). Il y a deux cas :

- si $n+1$ est premier, il n'y a rien à faire ($n+1 = n+1$ et $n+1$ est un nombre premier !)
- si $n+1$ n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n+1 = pq$, où p et q sont des entiers compris entre 2 et n. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q (p et q appartiennent à $[\![2, n]\!]$ donc $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$ sont vraies) : p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n+1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion :** On vient de démontrer, par récurrence forte, que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.20.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\forall x < 2,\ x^2 < 4$	☐	☐
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$	☐	☐
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.	☐	☐
4. La négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ ».	☐	☐
5. La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « le jour, aucun chat n'est gris »	☐	☐
6. La réciproque de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait nuit »	☐	☐
7. La contraposée de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait jour ».	☐	☐
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n$	☐	☐
9. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$	☐	☐
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \geqslant n+1$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Exos minutes

Exercice 1.1 : Soit P et Q deux assertions.
1. Quelle est la table de vérité de l'implication $P \Rightarrow Q$?
2. À l'aide des tables de vérité, démontrer que $(P \Rightarrow Q) \iff (NonP\ ou\ Q)$.

Exercice 1.2 : Que penser de l'implication « 5 *impair* $\Rightarrow$ 3 *impair* » ? Énoncer sa négation, sa contraposée.

Exercice 1.3 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Logique et propositions

Exercice 1.4 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. La négation de « f est une fonction paire » est « f est une fonction impaire ».
2. Lorsque la proposition (P *et* Q) est vraie, la proposition (P *ou* Q) l'est aussi.
3. Lorsque la proposition (P *ou* Q) est vraie, la proposition (P *et* Q) l'est aussi.
4. La négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition $P \Rightarrow non\ Q$.
5. Lorsque P est fausse et $P \Rightarrow Q$ vraie, alors Q est également fausse.
6. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$.
7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.
8. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+,\ y < \sqrt{x}$.

Exercice 1.5 : Donner la négation des propositions ou affirmations suivantes.
1. S'il pleut, je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. $2 \leqslant x < y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 1.6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.
1. La suite (u_n) est majorée par 4.
2. La suite (u_n) est majorée.
3. La suite (u_n) n'est pas majorée.
4. La suite (u_n) est bornée.
5. La suite (u_n) est croissante.
6. La suite (u_n) est constante.
7. La fonction f est la fonction nulle.
8. La fonction f s'annule.
9. La fonction f est croissante.
10. La fonction f admet un maximum.

Exercice 1.7 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Traduire par une phrase chacune des propositions suivantes.
1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

4. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
5. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

■ Modes de raisonnement

Exercice 1.8 : Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Exercice 1.9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1| = 4 - |3x-2|$.

Exercice 1.10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes

1. $|2x-5| = |x^2-4|$
2. $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$
3. $\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1$
4. $\sqrt{x-1} \geqslant x-7$

Exercice 1.11 : Raisonnements par contraposition
1. Soit a un réel. Démontrer l'implication :

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon\big) \Rightarrow a = 0.$$

2. Soit $n_1, n_2, \cdots, n_9$ des entiers naturels vérifiant $n_1 + \cdots + n_9 = 90$.
Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.

Exercice 1.12* : Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On rappelle qu'un réel est un nombre rationnel s'il peut s'écrire $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers.

Exercice 1.13* : Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(n) + f(m).$$

Exercice 1.14* : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 1.15 :** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

■ Récurrences

Exercice 1.16 : Sommes des carrés, des cubes —. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 1.17 : Montrer par récurrence les propriétés suivantes.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0! + 1! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 1.18 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Que peut-on dire de (u_n) ?

Exercice 1.19* : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2\cos x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2(\cos x)u_{n+1} - u_n.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\cos(nx).$$

Exercice 1.20 :** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 1.21* : Suite de Fibonacci —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \qquad (*)$$

On traitera cet exercice sans déterminer le terme général de la suite (u_n).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.

3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.

Exercice 1.22 :** Démontrer par récurrence les inégalités suivantes.

1. $\forall n \geqslant 2,\ 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1}$

Exercice 1.23 :** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Indications

Ex. 1.12

Raisonnement par l'absurde !

Ex. 1.13

Raisonner par analyse-synthèse.

Ex. 1.14

On raisonnera par analyse-synthèse. Dans la partie analyse, on commencera par montrer que $f(0) = 1$.

Ex. 1.15

Raisonner par l'absurde en supposant que cet ensemble $\mathcal{P}$ *est fini et, si l'on note* $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, *considérer l'entier* $N = p_1 \times \cdots \times p_k + 1$.

Ex. 1.17

Pour la deuxième question, comment traduit-on le fait qu'un entier est divisible par un autre ?

Ex. 1.20

On pourra appliquer une récurrence forte.

Ex. 1.23

On pourra commencer par montrer que, pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	F	F	V	F	V	F	F

1. C'est évidemment faux ! Par exemple, $-3 < 2$ mais $(-3)^2 > 4$ (**méthode 1.9**).

2. Les solutions de l'équation $x^2 = 4$ sont 2 et -2. L'équivalence correcte est :

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2).$$

3. On peut raisonner par disjonction des cas (**méthode 1.2**).
• Si n est pair, alors le produit $n(n+1)$ est pair.
• Si n est impair, alors $n+1$ est pair, et le produit $n(n+1)$ est pair.
Dans le deux cas, $n(n+1)$ est un entier pair.

4. Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$).
La négation de « f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ».

5. Cette proposition est de la forme $(P \Rightarrow Q)$, où P est la proposition « il fait nuit » et Q la proposition « tous les chats sont gris ». D'une manière générale, la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \textit{ et non } Q)$, soit ici « la nuit, au moins un chat n'est pas gris ».

6. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa réciproque est $(Q \Rightarrow P)$, c'est-à-dire « si tous les chats sont gris, il fait nuit ».

7. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa contraposée est $(\textit{non } Q \Rightarrow \textit{non } P)$, c'est-à-dire « si un chat au moins n'est pas gris, alors il fait jour ».

8. La proposition signifie qu'on peut toujours trouver un entier supérieur à un réel fixé, c'est vrai ! Si x est un réel fixé, et N sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x), on a $N \leqslant x < N+1$ et $N+1$ est un entier supérieur à x.

9. La proposition signifie qu'il existe un entier supérieur ou égal à tous les réels, ce qui est faux ($\mathbb{R}$ est non borné). Ces deux exemples nous montrent bien l'importance de l'ordre des quantificateurs.

10. Cette inégalité est fausse pour $n = 1$ et $n = 2$. En revanche, on peut démontrer (par récurrence) qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

P	Q	*non P ou Q*	$P \Rightarrow Q$	$(NonP\ ou\ Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

▲

Exercice 1.2

Dans cette implication, la prémisse et la conclusion sont vraies. Conformément à la définition de l'implication, cette assertion est donc vraie. La négation de cette implication est « 5 est impair et 3 est pair. ». La contraposée de l'implication est l'implication « 3 est pair ⇒ 5 est pair. ». ▲

Exercice 1.3

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- **Initialisation :** La propriété $\mathcal{P}(0$ est vraie car $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &\geqslant (1+a)^n\ (1+a)\\ &\geqslant (1+na)\ (1+a)\\ &\geqslant 1 + (n+1)a + na^2\\ &\geqslant 1 + (n+1)a\end{aligned}$$

- **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ▲

Exercice 1.4

1. C'est faux : une fonction qui n'est pas paire n'est pas nécessairement impaire ! Par exemple, la fonction exponentielle n'est ni paire, ni impaire.

2. C'est vrai : si la proposition (P *et* Q) est vraie, P et Q sont toutes les deux vraies donc (P *ou* Q) aussi.

3. C'est faux : si P est vraie et Q fausse, alors (P *ou* Q) est vraie mais (P *et* Q) est fausse.

4. C'est faux. En effet, $P \Rightarrow Q$ est la proposition (*non* P *ou* Q), sa négation est (P *et non* Q) alors que $P \Rightarrow$ *non* Q est la proposition (*non* P *ou non* Q).

Lorsque P est fausse, (P *et non* Q) est fausse, mais (*non* P *ou non* Q) est vraie.

$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).

5. C'est faux puisque, si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est automatiquement vraie (que Q soit vraie ou pas).

6. C'est vrai en prenant $a = 0$ (la proposition signifie qu'il existe un réel dont la valeur absolue est inférieure à tout réel positif).

7. C'est vrai en prenant, par exemple $a = \frac{\varepsilon}{2}$. La proposition signifie que l'on peut toujours trouver un réel dont la valeur absolue est strictement inférieure à un réel strictement positif fixé.

8. La proposition est vraie. Soit y un réel fixé. En posant $x = (|y|+1)^2 \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{x} = |y| + 1$, donc $\sqrt{x} > y$. ▲

Exercice 1.5

$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).

1. Cette phrase est de la forme $P \Rightarrow Q$, sa négation est (P *et non* Q), soit : « il pleut et je ne prends pas mon parapluie ».

2. L'affirmation comporte successivement un quantificateur universel $\forall$ (chaque été) et un quantificateur existentiel (il existe un jour durant lequel il a plu). La négation est donc « il y a eu un été en Bretagne sans aucun jour de pluie ». Cette dernière affirmation est évidemment fausse du point de vue météorologique...

3. La négation est : « il y a eu au moins un jour sans pluie l'été dernier en Bretagne ».

4. Cette double inégalité s'écrit aussi ($2 \leqslant x$ *et* $y > x$). Sa négation est : ($x < 2$ *ou* $x \geqslant y$).

non($P \Rightarrow Q$) est (P et non Q).

5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$. ▲

Exercice 1.6

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 4$.

*Dans **2**, M est **un** majorant de (u_n).*

2. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

3. On donne la négation de la proposition précédente : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$

$C = max(|m|, |M|)$

4. $\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$. On peut également écrire :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant C$$

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

6. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C$

7. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

8. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

9. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ x \geqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$.

f admet son maximum en a

10. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a)$ ▲

Exercice 1.7

1. La fonction f ne s'annule pas sur I.

2. La fonction f prend au moins deux valeurs différentes sur I. Autrement dit, f n'est pas constante sur I.

3. Si la fonction f s'annule, alors c'est forcément en 0. Autrement dit, f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais elle ne s'y annule pas nécessairement).
4. La fonction f prend toutes les valeurs réelles.
5. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur. ▲

On dit que f est surjective pour **4**, *injective pour* **5** *(voir le chapitre* **Applications***)*

Exercice 1.8

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
Pour cela, raisonnons par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Méthode 1.2

▸**Premier cas :** $x \geqslant 1$. Dans ce cas, $|x-1| = x-1$ et :

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(x-1) = x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1,$$

quantité positive. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
▸**Deuxième cas :** $x < 1$. On a alors $|x-1| = -(x-1)$, d'où :

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geqslant 0,$$

ce qui montre que, pour $x > 1$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$. ▲

Exercice 1.9

On a $|x+1| = x+1$ *ssi* $x+1 \geqslant 0$ et $|3x-2| = 3x-2$ *ssi* $3x-2 \geqslant 0$. Partant de ces remarques, on raisonne par disjonction de cas, en considérant trois cas.
▸**Premier cas :** $x \geqslant \frac{2}{3}$. On a alors $|x+1| = x+1$ et $|3x-2| = 3x-2$. L'équation équivaut à $x+1 = 4-(3x-2)$, soit $x = \frac{5}{4}$. Comme $\frac{5}{4} \geqslant \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ est solution.
▸**Deuxième cas :** $x \leqslant -1$. Dans ce cas, $|x+1| = -x-1$ et $|3x-2| = 2-3x$. L'équation équivaut à $-x-1 = 4+3x-2$, soit $x = -\frac{3}{4}$ qui ne convient pas puisque $-\frac{3}{4} > -1$.
▸**Troisième cas :** $x \in]-1, \frac{2}{3}[$. Dans ce dernier cas, $|x+1| = x+1$, $|3x-2| = 2-3x$ et l'équation équivaut à $x+1 = 4+3x-2$, soit $x = -\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2} \in]-1, \frac{2}{3}[$, $-\frac{1}{2}$ est effectivement solution.
Finalement, l'équation a deux solutions : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$. ▲

Exercice 1.10

On résout ces équations ou inéquations par équivalences, en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'on conserve bien une équivalence.

1. La valeur absolue d'un nombre est égale à C ($C \in \mathbb{R}^+$) si et seulement si ce nombre est égal à C ou à $-C$. Par conséquent,

Lorsque $C \geqslant 0$, $|X| = C \Leftrightarrow X = \pm C$.

$$\begin{aligned} |2x-5| = |x^2-4| &\Leftrightarrow 2x-5 = x^2-4 \text{ ou } 2x-5 = -(x^2-4) \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-9 = 0 \end{aligned}$$

L'unique solution de la première équation est 1, les solutions de la deuxième équation sont $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$. Les solutions de l'équation sont donc 1, $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$.

2. Les nombres $\sqrt{|x-3|}$ et $|x-1|$ étant tous les deux positifs, on a :

Corrigé

Lorsque A et B sont de même signe, $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|} = |x-1| &\Leftrightarrow |x-3| = (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x-3 = (x-1)^2 \text{ ou } x-3 = -(x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x-3 = x^2-2x+1 \text{ ou } x-3 = -x^2+2x-1\\ &\Leftrightarrow x^2-3x+4 = 0 \text{ ou } x^2-x-2=0\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ pour le premier trinôme.

Le premier trinôme n'a pas de racine réelle et les racines du second sont -1 et 2. Par conséquent, les solutions de l'équation sont -1 et 2.

Attention à ne pas élever au carré sans la précaution $x \geqslant 1$.

3. Si $x < 1$, l'équation n'a clairement pas de solution (car alors $\sqrt{|x-3|} \geqslant 0$ et $x - 1 < 0$). Lorsque $x \geqslant 1$, $\sqrt{|x-3|}$ et $x-1$ sont positifs. Ainsi,

Lorsque A et B sont positifs, $A \leqslant B \Leftrightarrow A^2 \leqslant B^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1 &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } |x-3| \leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -(x-1)^2 \leqslant x-3 \leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -x^2+2x-1 \leqslant x-3 \leqslant x^2-2x+1\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } x^2-x-2 \geqslant 0 \text{ et } x^2-3x+4 \geqslant 0\end{aligned}$$

Ne pas oublier que $x \geqslant 1$.

Le premier trinôme a pour racines -1 et 2 donc $x^2 - x - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. Par ailleurs, le discriminant du second trinôme étant strictement négatif, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 > 0$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[2, +\infty[$.

$\sqrt{a}$ existe ssi $a \geqslant 0$

4. L'inéquation est définie pour $x \geqslant 1$. Par ailleurs, tout réel $x \in [1, 7]$ est solution de l'inéquation (si $x \in [1, 7]$, le membre de gauche de l'inégalité est positif, celui de droite est négatif). Enfin, pour $x \geqslant 7$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et on obtient une inéquation équivalente en élevant au carré :

Pour $A, B \geqslant 0$, $A \geqslant B \Leftrightarrow A^2 \geqslant B^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \geqslant x-7 \text{ et } x \geqslant 7 &\Leftrightarrow x-1 \geqslant (x-7)^2 \text{ et } x \geqslant 7\\ &\Leftrightarrow x-1 \geqslant x^2-14x+49 \text{ et } x \geqslant 7\\ &\Leftrightarrow x^2-15x+50 \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 7.\end{aligned}$$

Les solutions de $x^2 - 15x + 50 = 0$ étant 5 et 10, on a $x^2 - 15x + 50 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [5, 10]$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1, 10]$. ▲

Exercice 1.11

1. Raisonnons par contraposition en prouvant l'implication :

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ |a| \geqslant \varepsilon.$$

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Soit $a \neq 0$. En cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant \varepsilon$. Le réel $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ convient : en effet, $|a| \geqslant \frac{|a|}{2}$ et $\frac{|a|}{2} > 0$ puisque $a \neq 0$. On a donc établi (par contraposition) l'implication attendue.

$n_7 + n_8 + n_9$ est la plus grande somme formée à partir des 9 entiers

2. Quitte à réordonner $n_1, n_2, \cdots, n_9$, on peut supposer que $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$. Nous allons raisonner par contraposition en montrant que :

$$n_7 + n_8 + n_9 < 30 \Rightarrow n_1 + \cdots + n_9 \neq 90.$$

Supposons que $n_7+n_8+n_9<30$. Comme $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$, on a :

$$n_1+n_2+n_3 \leqslant n_4+n_5+n_6 \leqslant n_7+n_8+n_9 < 30.$$

Par conséquent, $n_1+\cdots+n_9 < 3\times 30$, d'où $n_1+\cdots+n_9 \neq 90$. D'où le résultat par contraposition. ▲

Exercice 1.12

On raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel : il existe des entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. On suppose (quitte à la simplifier) que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Comme $q\sqrt{2}=p$, on a $2q^2=p^2$, ce qui montre que p^2 est pair, donc p l'est aussi. On peut donc écrire $p=2p'$, où $p'\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, $2q^2=(2p')^2=4p'^2$, d'où $q^2=2p'^2$. Cela montre que q^2 est pair, donc q aussi : $q=2q'$, avec $q'\in\mathbb{N}^*$. Par conséquent, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible puisque $\frac{p}{q}=\frac{2p'}{2q'}=\frac{p'}{q'}$. Contradiction ! ▲

✎ **méthode 1.3**

✎ *Voir l'exemple de la* **méthode 1.5**

Exercice 1.13

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.
Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\ f(m+n)=f(m)+f(n).$$

On a alors $f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$, $f(3)=f(2)+f(1)=3f(1)$, puis, par une récurrence immédiate :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=nf(1),$$

ce qui montre que f est une fonction de la forme $n\mapsto\lambda n$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.
Synthèse. Supposons maintenant qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=\lambda n$. Alors :

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\ f(m+n)=\lambda(m+n)=\lambda m+\lambda n=f(m)+f(n),$$

donc f vérifie la condition indiquée.
Conclusion. Les fonctions f solutions du problème sont les fonctions de la forme $n\mapsto\lambda n$, où λ est un réel. ▲

Exercice 1.14

On raisonne de nouveau par analyse-synthèse.
Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x)f(y)=f(xy)+x+y. \qquad (*)$$

En prenant $x=y=0$ dans cette relation, on obtient $f(0)^2=f(0)$, soit $f(0)(f(0)-1)=0$. On a donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$. Mais si $f(0)=0$, alors, en prenant $x=0$ et $y=1$, la relation $(*)$ donne $0=1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $f(0)=1$. On en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x+1.$$

✎ *Relation $(*)$ appliquée à $y=0$ et x quelconque.*

Synthèse. On suppose maintenant que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Alors :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x)f(y)=(x+1)(y+1)=xy+1+x+y=f(xy)+x+y,$$

Corrigé

ce qui montre que f vérifie la relation $(*)$.
Conclusion. L'unique fonction vérifiant la relation $(*)$ est $f : x \mapsto x+1$. ▲

Exercice 1.15

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini k de nombres premiers. En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on peut donc écrire $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, où $p_1, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers. On introduit alors l'entier naturel $N = p_1 \cdots p_k + 1$. Montrons que N n'est divisible par aucun des p_i ($i \in [\![1, k]\!]$). S'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que p_i divise N, alors on peut écrire $N = q \times p_i$, avec $q \in \mathbb{N}$. On a alors $q \times p_i = p_1 \cdots p_k + 1$, soit :

Preuve par contraposition.

$$p_i \times \underbrace{(q - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k)}_{s} = 1.$$

Ainsi, p_i et s sont deux entiers dont le produit vaut un : chacun des deux est donc égal à 1 ou à -1. En particulier, p_i vaut 1 ou -1, il n'est donc pas premier. Finalement, on a montré (par contraposition) que N n'est divisible par aucun des p_i. On en déduit que N est un nombre premier. Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $N > p_i$. On a donc trouvé un nombre premier qui n'est égal à aucun des p_i. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{P}$ a au moins $k+1$ éléments, ce qui est contradictoire ! En définitive, l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini. ▲

Exercice 1.16

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times 2\times 3}{6}$.
• **Hérédité :** On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Alors :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right] \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $2n^2 + 7n + 6$ étant -2 et $-\frac{3}{2}$, on en déduit que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \times 2(n+2)(n+\frac{3}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note cette fois $\mathcal{P}(n)$: « $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times 4}{4}$.
• **Hérédité :** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On retrouvera les deux sommes de cet exercice dans le chapitre **Calcul algébrique**.

Alors :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ▲

Exercice 1.17

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0! + 1! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $0! = 1$ et $(0+1)! = 1! = 1$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$: $0!+1!+\cdots+n! \leqslant (n+1)!$. Alors :

$$\underbrace{0! + 1! + \cdots + n!}_{\leqslant (n+1)! \text{ d'après } \mathcal{P}(n)} + (n+1)! \leqslant (n+1)! + (n+1)!.$$

Or $2(n+1)! \leqslant (n+2)!$ puisque $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$2 \leqslant n+2$

• **Conclusion :** On a démontré l'inégalité attendue par récurrence sur n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « 9 divise $10^n - 1$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est divisible par 9.

0 est divisible par tout entier non nul !

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que 9 divise $10^n - 1$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n - 1 = 9k$. Alors :

a divise b ssi il existe $c \in \mathbb{Z}$, $b = ac$.

$$10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1 = 10(9k+1) - 1 = 9 \times 10k + 9 = 9(10k+1),$$

ou encore $10^{n+1} - 1 = 9k'$, avec $k' = 10k + 1$. Cela signifie que 9 divise $10^{n+1} - 1$: c'est $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$. ▲

Exercice 1.18

On effectue une récurrence double en notant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n = u_0 + nr \gg.$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = u_0 + 0 \times r$ et $u_1 = u_0 + u_1 - u_0 = u_0 + r$.
• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_0 + (n+1)r.$$

Comme $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n = 2[u_0 + (n+1)r] - (u_0 + nr) \\ &= u_0 + [2(n+1) - n]r = u_0 + (n+2)r, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On déduit de l'égalité démontrée que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r = u_1 - u_0$. ▲

Corrigé

Exercice 1.19

On effectue une récurrence double en notant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n = 2\cos(nx) \gg.$$

•**Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = 2 = 2\cos 0$ et $u_1 = 2\cos x$.
• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies :

$$u_n = 2\cos(nx) \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2\cos[(n+1)x].$$

Hypothèse de récurrence au rang n et $n+1$, formules d'addition et formules de duplication.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2(\cos x)u_{n+1} - u_n = 2(\cos x)2\cos[(n+1)x] - 2\cos nx \\ &= 4\cos x(\cos nx\ \cos x - \sin nx\ \sin x) - 2\cos nx \\ &= 2\cos nx(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x\ \sin x\ \sin nx \\ &= 2\cos 2x\cos nx - 2\sin 2x\sin nx = 2(\cos 2x\cos nx - \sin 2x\sin nx) \\ &= 2\cos[(n+2)x], \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.20

On applique une récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = 2^0(0+1)$ ($p = q = 0$ conviennent).

Tout $k \in [\![1, n]\!]$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. On veut montrer que $n+1$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$, où $p, q \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas :
– si $n+1$ est impair, n est pair et le résultat est évident. En effet, il suffit de prendre $p = 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$. On a alors $n+1 = 2q+1$.
– si $n+1$ est pair, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2k$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à k : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^p(2q+1)$. Ainsi, $n+1 = 2k = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1)$.
Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• **Conclusion :** Le résultat attendu est établi par récurrence forte. ▲

Exercice 1.21

1. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

*Récurrence double : on suppose le résultat vrai aux rangs n **et** $n+1$, on le démontre au rang $n+2$.*

• **Initialisation :** L'inégalité est vraie aux rangs 0 et 1 puisque $u_0 = 1 \geqslant 0$ et $u_1 = 1 \geqslant 1$.
•**Hérédité :** On suppose que l'inégalité est vraie aux rangs n et $n+1$: $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$. D'après la relation $(*)$, on a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geqslant n+1+n$. Si $n = 0$, alors $u_2 = 2 \geqslant 2$ et si $n \geqslant 1$, alors $n+n+1 \geqslant n+2$. Cela montre que l'inégalité est vraie au rang $n+2$.
• **Conclusion :** Par récurrence double, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème de comparaison

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. On démontre cette fois l'égalité à l'aide d'une récurrence simple.
•**Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 1 puisque $u_1^2 - u_0u_2 = 1^2 - 1 \times 2 =$

$-1 = (-1)^1$.
• **Hérédité :** On suppose que $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la relation $(*)$, on a :

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1},$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - [u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n] - u_n u_{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

car $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$ d'après $(*)$. Ainsi, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n+1}$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On effectue de nouveau une récurrence simple.
•**Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 1 car $u_1 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.
• **Hérédité :** On suppose que l'égalité est vraie au rang $n \geqslant 1$. On a alors :

$$u_1 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n+1} = (u_1 + \cdots + u_{2n-1}) + u_{2n+1} = u_{2n} - 1 + u_{2n+1}.$$

Or, $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ d'après la relation $(*)$; d'où :

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} = u_{2n+2} - 1,$$

ce qui démontre l'égalité au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété est établie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Encore une récurrence simple !
• **Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 0 puisque $u_0 = 1 = 2-1 = u_2 - 1$.
• **Hérédité :** On suppose que l'égalité est vérifiée au rang n, alors :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1} &= (u_0 + \cdots + u_n) + u_{n+1} = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \\ &= u_{n+3} - 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de $(*)$. Ainsi, l'égalité est vraie au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence simple, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.22

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.

1. Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $\frac{3\times 2}{2\times 2+1} = \frac{6}{5}$ et $\frac{5}{4} > \frac{6}{5}$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 2$ fixé, c'est-à-dire que $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
On a alors

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Corrigé