

Annales

corrigées et commentées

Concours

2023/2024/2025

PSi

Physique Chimie

Mines-Ponts
Centrale-Supélec
CCINP
e3a



Erwan Capitaine
Steve Arnefaux
Guillaume Pages
Vincent Bachelet

PARTIE I

MINES PONTS

1 - Physique 1 2023

Mines Ponts Physique 1 PSI 2023

Présentation

Thèmes abordés : *MÉCANIQUE DES FLUIDES : nombre de Reynolds, champ de vitesses. ÉLECTROSTATIQUE : champ électrique, potentiel électrique, théorème de Gauss. MAGNÉTOSTATIQUE : topologie du champ magnétique, milieux magnétiques, excitation magnétique et aimantation, théorème d'Ampère. MÉCANIQUE : forces centrales (force coulombienne), mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique (énergie, principe fondamental de la dynamique), théorème de la résultante dynamique, force de Laplace. INDUCTION : loi de Faraday, circuits couplés par induction mutuelle.*

Commentaires

La géométrie cylindrique constitue la trame du sujet. Elle permet de balayer les thèmes de la mécanique du fluide, l'électrostatique, la magnétostatique, la mécanique du point et l'induction.

La première partie ne présente pas de difficulté si le cours portant sur les écoulements homogènes et incompressibles dans une conduite cylindrique en régime laminaire est connu.

La seconde partie réunit l'étude d'une particule chargée, l'électrostatique et la magnétostatique. Le sujet demande qu'on fasse le lien entre les résultats de questions portant sur différentes parties du programme de première et de deuxième années. On peut se reposer sur les questions de cours (11, 13 et 16) pour surmonter cette difficulté. On note que la question 21, plus ouverte, requiert une analyse et une appropriation plus poussée.

La dernière partie débute comme un exercice sur les milieux magnétisables, qui se développe sans embûche en étude du phénomène d'induction mutuelle. Néanmoins, la question 26 pose une vraie difficulté si l'on n'a pas une connaissance solide du couplage inductif, ainsi qu'une bonne capacité d'analyse des approximations possibles, ou, le cas échéant, d'une certaine intuition calculatoire.

Ce sujet, en plus d'un niveau de connaissance correct, requiert une bonne capacité de modélisation des phénomènes. Il demande une aisance calculatoire ainsi qu'un certain sens physique permettant d'émettre des hypothèses et d'apprécier les approximations qui en découlent.

Extrait du rapport du jury

«Le sujet était certes d'un niveau robuste mais présentait des points d'entrée accessibles, en particulier des questions de cours explicitement posées comme telles, et ceci dans les trois parties.»

«Les calculs numériques sans machines sont peut-être un peu rébarbatifs mais un peu d'entraînement les rend faciles et l'analyse des ordres de grandeur est au centre du raisonnement du physicien. Aussi le barème valorise toujours ces calculs.»

Mines Ponts Physique 1 PSI 2023

Énoncé

A2023 – PHYSIQUE I PSI



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

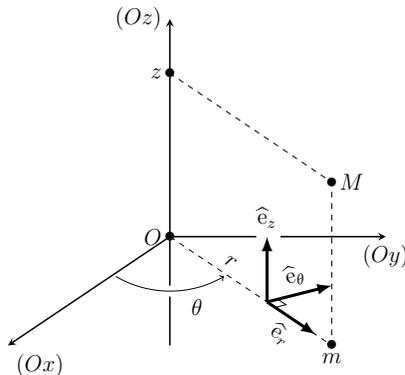
PHYSIQUE I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Physique en géométrie cylindrique

Ce sujet est consacré à l'étude de divers phénomènes physiques décrits dans le système de coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) (r, θ, z) du point M rappelé sur la figure 1 ; m est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) . On rappelle aussi, dans ce système de coordonnées, les expressions de plusieurs opérateurs de l'analyse vectorielle. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{a}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau (\hat{e}_x).



$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z$$

FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

Les parties **I**, **II** et **III** sont totalement indépendantes. La partie **I** établit le lien entre la viscosité du sang s'écoulant dans les vaisseaux capillaires (cylindriques) et la puissance de la pompe formée par le cœur humain. La partie **II** décrit quelques propriétés du tube (cylindrique) des magnétrons, utilisés notamment comme émetteurs d'ondes électromagnétiques dans les fours à micro-ondes. Enfin, la partie **III** étudie la possibilité de la lévitation magnétique d'une bobine d'induction enroulée autour d'un cylindre formé d'un matériau magnétisable linéaire.

Pour toutes les applications numériques on pourra se contenter d'un seul chiffre significatif.

I La circulation capillaire

En 1844, le physicien et médecin français Poiseuille débute son mémoire nommé « le Mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres » par la phrase suivante : *Les physiologistes et les pathologistes se sont beaucoup occupés à rechercher les causes pour lesquelles tel viscère recevait plus de sang que tel autre.*

Il poursuit en indiquant que les causes essentielles en sont *l'étendue et le diamètre des petits vaisseaux qui composent le système capillaire et la pression du sang, déterminée par l'action du cœur.* Dans ce qui suit, le sang sera décrit comme un fluide en écoulement incompressible de masse volumique $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Il s'écoule en régime stationnaire le long des vaisseaux capillaires, tubes cylindriques de rayon R variant de 3 à 15 μm de diamètre. On s'intéressera ici à un *capillaire typique*, de rayon $R = 10 \mu\text{m}$.

- – 1. Rappeler l'expression et la signification physique du *nombre de Reynolds* \mathcal{R}_e d'un écoulement.

La physiologie humaine adulte est caractérisée par un volume sanguin total de l'ordre de 5 à 6 litres, une longueur totale du système capillaire de l'ordre de 100 000 km. Le *volume systolique* (la quantité de sang éjectée par chaque contraction du cœur) est d'environ 100 mL ; la fréquence cardiaque de repos d'un adulte sera prise à 60 battements par minute. Enfin, la section cumulative (somme de toutes les sections) de tous les capillaires est d'environ $\sigma = 0,5 \text{ m}^2$.

- – 2. Estimer la longueur moyenne d'un vaisseau capillaire typique.
- – 3. Estimer le débit massique moyen D_m du sang dans un capillaire typique, puis le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e associé. Conclure.

Un capillaire typique est un tube cylindrique rigide, d'axe (Oz) , de rayon $R = 10 \mu\text{m}$ et de longueur $\ell = 5 \text{ cm}$, parcouru par le fluide en écoulement incompressible et visqueux qui modélise le sang. On *admet* que la vitesse du sang ne dépend que de la distance r à l'axe et de la distance z parcourue depuis l'entrée dans le capillaire ; on l'écrit $\vec{v} = v(r,z)\hat{e}_z$. On néglige les effets de la pesanteur et la pression du sang dans le tube capillaire ne dépend que de z .

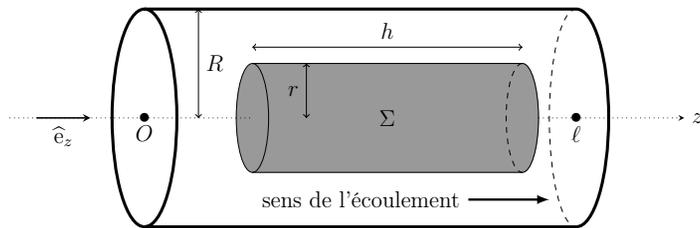


FIGURE 2 – Capillaire et élément de fluide étudié.

On étudie (cf. figure 2) l'écoulement du fluide situé à une distance au plus égale à r de l'axe du capillaire, sur une longueur arbitraire $h < \ell$.

- – 4. Montrer que le caractère incompressible de l'écoulement assure que cet élément de fluide n'est pas accéléré.
- – 5. En déduire l'existence d'un gradient de pression $\frac{dP}{dz}$ constant dont on précisera l'expression en fonction, notamment, du terme de viscosité $\eta \frac{\partial v}{\partial r}$.
- – 6. Exprimer complètement $v(r,z)$ en fonction de R , η et $\frac{dP}{dz}$.
- – 7. En déduire la *résistance linéique d'écoulement* R_u , définie par la relation $\left| \frac{dP}{dz} \right| = R_u D_m$.
- – 8. Calculer numériquement l'écart de pression ΔP de part et d'autre du capillaire en précisant en quel point la pression est la plus élevée.
- – 9. Exprimer la puissance des forces de pression exercées sur le fluide traversant le capillaire en fonction de ΔP , D_m et ρ puis en fonction de R_u , ρ , D_m et ℓ .
- – 10. Que peut-on en déduire concernant la puissance totale moyenne du cœur humain ? On attend ici une réponse numérique.

II Le magnétron

Le magnétron est un générateur d'ondes radio (notamment utilisé pour la production des ondes de fréquence $f_0 = 2,45$ GHz utilisées dans les fours à micro-ondes). Les schéma de la figure 3 sont extraits du brevet américain N° 2 123 728 déposé en 1938 par Telefunken.

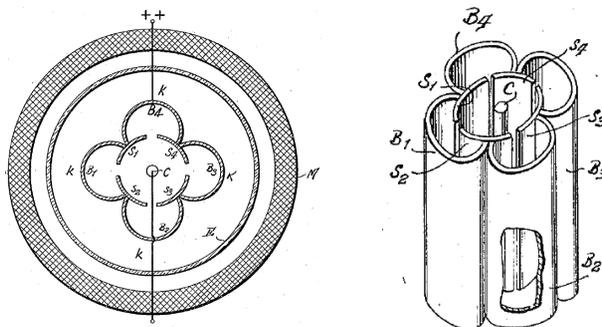


FIGURE 3 – Brevets originaux du magnétron.

Le dispositif comporte un bobinage M , entourant le reste du dispositif et représenté sur la figure 3, qui crée un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ et une cathode C cylindrique de rayon a , chauffée donc permettant d'émettre des électrons de faible vitesse. Ces électrons sont accélérés par la différence de potentiel avec une anode circulaire de rayon b (ici découpée en quatre parties S_1 , S_2 , S_3 et S_4). L'anode est portée à une tension positive U_0 relativement à C pour accélérer les électrons. Pour les applications numériques on prendra $a = 1$ mm et $b = 6$ mm. L'intérieur du dispositif est initialement vide. Un schéma de principe résumant le brevet original fait l'objet de la figure 4

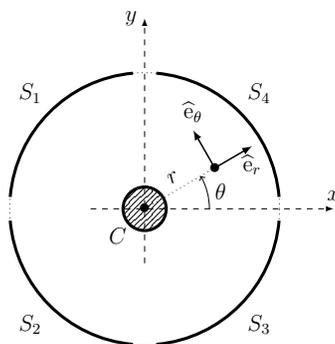


FIGURE 4 – Schéma de principe du magnétron. Le bobinage extérieur M n'est pas représenté.

- – 11. Comment choisir la géométrie du bobinage M et le courant I dans M pour créer un tel champ magnétique ?
- – 12. Expliciter le potentiel électrostatique $V(r)$ en tout point de la cavité $a \leq r \leq b$. On négligera tout effet de bord.

Au cours de leur mouvement, ces électrons (masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C) passent dans la cavité entre les différentes parties de l'anode. Ils émettent une onde électromagnétique de pulsation égale à celle de leur mouvement au voisinage de l'anode. Dans un premier temps nous négligerons l'effet de la charge des électrons en mouvement sur le champ électromagnétique dans la cavité.

- – 13. Montrer que le mouvement des électrons est plan.
- – 14. Rappeler le théorème du moment cinétique ; expliciter la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ des électrons en fonction de r , a et de $\omega_c = eB_0/m_e$.
- – 15. Quelle valeur du champ magnétique faut-il imposer pour produire une onde de fréquence f_0 au voisinage de l'anode ? Faire l'application numérique.

L'appareil ne fonctionne de façon satisfaisante que si les électrons atteignent en grand nombre le voisinage immédiat de l'électrode externe, mais sans jamais entrer en contact avec celle-ci.

- – 16. Montrer que le mouvement est conservatif ; en déduire l'expression de la vitesse radiale \dot{r} de l'électron en fonction de r et des autres paramètres du problème.
- – 17. Comment choisir la tension U_0 pour assurer le bon fonctionnement de l'appareil ? *On se contentera d'une expression analytique de U_0 en fonction de e , m_e , B , a et b sans faire l'application numérique.*

En présence d'une densité assez élevée d'électrons, le champ électrique est modifié par leur présence. Nous ne ferons l'étude que d'une solution particulière du problème : on considère que tous les électrons tournent sur des trajectoires circulaires de rayons variables $a < r < b$ à la même vitesse angulaire constante ω dans un champ magnétique supposé inchangé. On notera ϵ_0 la permittivité du vide.

- – 18. Expliciter, en fonction de ω_c , ω , e , m_e et r , le champ électrique \vec{E} présent dans la cavité et permettant un tel mouvement des électrons. On vérifiera que ce champ est fonction linéaire de r .
- – 19. En déduire la différence de potentiel U_0 en fonction des mêmes paramètres et de a et b .
- – 20. Exprimer la densité particulaire des électrons dans l'appareil en fonction de a , b , U_0 , ϵ_0 et e .
- – 21. L'hypothèse consistant à considérer le champ magnétique comme inchangé est-elle raisonnable ?

III Lévitiation magnétique

On dispose (voir figure 5) deux spires plates, formées respectivement de N_1 et N_2 spires circulaires de rayon R et d'axe (Oz) ; elles entourent toutes les deux un cylindre de rayon très légèrement inférieur à R , de hauteur ℓ , formée d'un matériau magnétisable ; on note \vec{M} l'aimantation du matériau (moment dipolaire magnétique par unité de volume) et on supposera le milieu linéaire de susceptibilité magnétique χ : $\vec{M} = \chi \vec{H}$ où \vec{H} est l'excitation magnétique.

- – 22. Déterminer la dimension de χ .
Quelle relation lie \vec{H} et le champ magnétique \vec{B} ?
Définir puis exprimer la perméabilité magnétique relative μ_r du milieu.

On admet que les lignes de champ des vecteurs \vec{H} , \vec{B} et \vec{M} à l'intérieur du milieu magnétique sont des droites parallèles à (Oz). On notera $\vec{B} = B_0(z)\vec{e}_z$

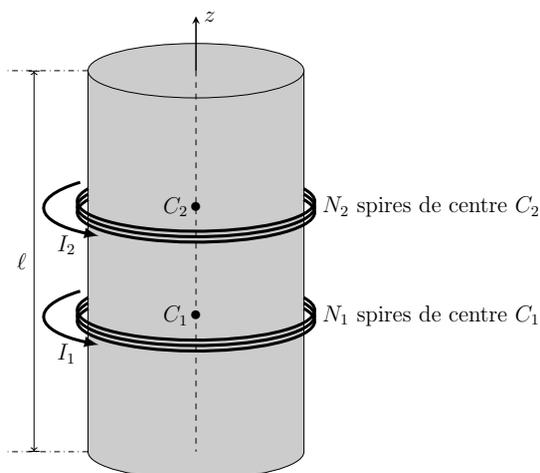


FIGURE 5 – Système de deux bobines.

- – 23. Montrer que ces trois champs sont uniformes dans ce milieu.
 En négligeant le champ magnétique à l'extérieur du milieu magnétique, exprimer B_0 en fonction de μ_r , μ_0 , N_1 , N_2 , ℓ et des courants I_1 et I_2 dans les deux bobines.
- – 24. En déduire les inductances propres L_1 et L_2 des deux bobines et leur inductance mutuelle M_0 .

Dans ce qui suit, la bobine N°1 est fixe à la base $z = 0$ du cylindre et l'on considère que C_1 se situe à l'origine O de l'axe (Oz) . La bobine N°2 est mobile; on note z l'abscisse de son centre C_2 . On suppose enfin que l'inductance mutuelle $M(z)$ est une fonction positive monotone décroissante de z qu'on écrira sous la forme $M(z) = M_0 f(z)$.

Le courant électrique $I_1(t) = I \cos(\omega t)$ est imposé par un générateur que l'on ne précisera pas. La spire N°2 est fermée sur elle-même et on nomme G sa conductance électrique.

- – 25. Déterminer, en régime harmonique forcé et à altitude z fixée, l'expression du courant induit sous la forme $I_2(z,t) = I[\beta(z) \sin(\omega t) - \alpha(z) \cos(\omega t)]$. On exprimera les fonctions $\beta(z)$ et $\alpha(z)$ en fonction de G , $M(z)$, ω et L_2 .
- – 26. Montrer que, dans des conditions d'approximation à préciser, l'expression de la composante radiale du champ $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ créé par la bobine N°1 au niveau de la bobine N°2, s'écrit

$$B_r = \hat{e}_r \cdot \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \simeq -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 R}{2\ell} I_1(t) \frac{df}{dz}.$$

- – 27. En déduire la valeur moyenne, sur une période, de la force exercée sur la bobine N°2. Commenter son signe et l'influence de z sur cette force.

FIN DE L'ÉPREUVE

Mines Ponts Physique 1 PSI 2023

Corrigé

Physique en géométrie cylindrique

I La circulation capillaire

Q1 L'expression du nombre Reynolds \mathcal{R}_e est

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho U L}{\eta}$$

avec U et L la vitesse et la longueur caractéristiques de l'écoulement.

Ce nombre permet de comparer la part de convection, liée à l'inertie et donc à la masse volumique ρ , et la part de diffusion, liée à la viscosité et donc à la viscosité dynamique η , dans le transport de la quantité de mouvement. Pour l'obtenir on peut faire le rapport entre les temps caractéristiques de diffusion, $\tau_{\text{diff}} \simeq \rho L^2 / \eta$, et de convection, $\tau_{\text{conv}} = L / U$, de la quantité de mouvement.

Commentaire

Des écoulements avec différentes propriétés (masse volumique, viscosité dynamique, vitesse caractéristique, etc.) peuvent présenter un nombre de Reynolds identique. En général, leur nature laminaire ou turbulente est similaire.

Il existe d'autres nombres sans dimension qui permettent de caractériser un écoulement. Citons, par exemple, le nombre de Péclet \mathcal{P}_e qui permet de comparer des transports convectif et diffusif de matière. À l'instar du nombre de Reynolds, il peut être défini comme le rapport entre les vecteurs densité de courant de convection et de diffusion de masse, et non de quantité de mouvement[1].

Q2 Un capillaire typique a un rayon $R = 10 \mu\text{m}$, soit une section $\sigma_c \simeq 3 \times 10^{-10} \text{m}^2$. La section cumulative de tous les capillaires est $\sigma = 0,5 \text{m}^2$. Ainsi le nombre moyen de capillaires est $N = \sigma / \sigma_c \simeq 1,6 \times 10^9$. La longueur totale du système capillaire étant de l'ordre de 100 000 km, il vient que la longueur moyenne d'un capillaire, notée ℓ_c , est en ordre de grandeur

$$\ell_c \simeq \frac{100\,000 \times 10^3 \text{ m}}{1,6 \times 10^9} \simeq \frac{1 \text{ m}}{15} \simeq 7 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Commentaire

Un peu plus loin dans le sujet, une valeur de 5 cm est fournie comme longueur de capillaire typique. Elle permet la poursuite du sujet dans le cas où on ne peut pas répondre à la question précédente. Dans le cas contraire, son rôle est également de fournir une référence à laquelle comparer le résultat en ordre de grandeur obtenu.

Q3 On suppose que le volume systolique de $V = 100 \text{ mL}$ est partagé uniformément entre les différents capillaires. Ainsi le volume de sang parcourant un capillaire typique durant un battement est $V_c = V/N \simeq 6 \times 10^{-14} \text{ m}^3$.

La fréquence cardiaque de repos d'un adulte étant prise à 60 battements par minute, soit 1 battement par seconde, le débit volumique moyen d'un capillaire typique est $D = V_c/1 \text{ s} = 6,3 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Le débit massique moyen d'un capillaire s'obtient en multipliant D par la masse volumique du sang ρ , soit en ordre de grandeur

$$D_m = D \times \rho \simeq 6 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \times 1,1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \simeq 7 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

À partir du débit massique, du rayon et de la section d'un capillaire typique, on peut alors estimer le nombre de Reynolds associé

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho U \times 2R}{\eta} = \frac{\rho D \times 2R}{\sigma_c \eta} = \frac{D_m \times 2R}{\sigma_c \eta}.$$

A.N.

$$\mathcal{R}_e \simeq \frac{7 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \times 2 \times 10 \times 10^{-6} \text{ m}}{3 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \times 1,6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} \simeq \frac{15 \times 10^{-3}}{5} = 3 \times 10^{-3}.$$

Q4 Un écoulement incompressible implique que le champ de vitesse est de divergence nulle, $\text{div } \vec{v} = 0$. En coordonnées cylindrique la divergence du champ de vitesse est

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v(r, z)}{\partial z} = 0$$

car la vitesse a uniquement une composante selon l'axe (Oz). Cette composante ne dépend donc pas de z et l'expression de la vitesse se résume à $\vec{v} = v(r) \hat{e}_z$.

Les lignes de courant, par définition tangentes en tout point au vecteur vitesse, sont donc orientées selon l'axe (Oz) et chacune d'entre elles correspond à une coordonnée r spécifique. Comme l'écoulement est stationnaire, les trajectoires des éléments du fluide sont identiques aux lignes de courant, des droites parallèles à l'axe (Oz). Leur vitesse ne dépend pas donc pas de z le long de leur trajectoire : **les éléments de fluide ne sont pas accélérés au cours de leur mouvement.**

Commentaire

Les hypothèses d'un fluide ou d'un écoulement incompressible impliquent toutes les deux que la divergence du champ de vitesse soit nulle. La démonstration donnée dans le commentaire page 50 démontre que si un fluide est incompressible, alors l'écoulement l'est forcément. La réciproque n'est pas vraie.

Q5 On considère comme système une particule fluide située entre r et $r + dr$ et de longueur dz . Elle est soumise à la résultante des forces élémentaires de pression $\delta \vec{F}_P$, qui ne dépend que de z selon l'énoncé, aux forces élémentaires de viscosité $\delta \vec{F}_v(r)$ et $\delta \vec{F}_v(r + dr)$ exercée par les particule fluide en contact avec elle en r et $r + dr$. De plus, on néglige l'effet de la pesanteur comme indiqué aussi dans l'énoncé. En étudiant la particule dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre supposé galiléen, on peut appliquer le théorème de la résultante dynamique (TRD) à la particule

$$m \vec{a} = \delta \vec{F}_P + \delta \vec{F}_v(r) + \delta \vec{F}_v(r + dr)$$

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P(z) r dr d\theta dz + \eta \frac{dv(r + dr)}{dr} (r + dr) d\theta dz \hat{e}_z - \eta \frac{dv(r)}{dr} r d\theta dz \hat{e}_z$$

car la particule a une vitesse constante comme montré plus tôt.

En simplifiant et en reconnaissant la dérivée de la fonction $r \, dv(r) / dr$ par rapport à r pour dr tendant vers 0 on voit que

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \eta \frac{dv(r)}{dr} \right).$$

Les deux termes de cette égalité dépendent de coordonnées indépendantes, ils correspondent donc à la même constante. Ainsi **le gradient de pression $dP(z)/dz$ est constant.**

Q6 En intégrant selon r la relation obtenue précédemment

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{dP(z)}{dz} + A = r \eta \frac{dv(r)}{dr}$$

avec A une constante d'intégration. En intégrant de nouveau selon r

$$\left(\frac{1}{2} r \frac{dP(z)}{dz} + \frac{A}{r} \right) dr = \eta dv(r) \quad ; \quad \frac{1}{4} r^2 \frac{dP(z)}{dz} + A \ln r + B = \eta v(r)$$

avec B une autre constante d'intégration. La vitesse devant rester finie, la constante A est nulle pour éviter la divergence du terme $\ln r$ en 0, ainsi

$$v(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dP(z)}{dz} + \frac{B}{\eta}.$$

De plus, la couche de fluide en contact avec la paroi étant immobile, on exploite la condition aux limites $v(R) = 0$ afin de déterminer la constante B

$$B = -\frac{R^2}{4} \frac{dP(z)}{dz}.$$

Ainsi, l'expression du champ de vitesse dans un capillaire est, selon les conditions considérées, telle que

$$v(r) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \frac{dP(z)}{dz}$$

il s'agit d'un profil parabolique.

Q7 Par définition, le débit massique au travers la section S du capillaire est

$$\begin{aligned} D_m &= \iint_S \rho v(r) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi \rho}{2\eta} \frac{dP(z)}{dz} \left(\int_0^R r^3 \, dr - \int_0^R r R^2 \, dr \right) \\ &= \frac{\pi \rho}{2\eta} \frac{dP(z)}{dz} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2} \right) = -\frac{\pi \rho R^4}{8\eta} \frac{dP(z)}{dz}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression nous permet d'identifier la résistance linéique d'écoulement R_u

$$R_u = \frac{8\eta}{\pi \rho R^4}.$$

Q8 On a montré à la question **Q5** que le gradient de pression $dP(z)/dz$ est constant. On peut donc l'exprimer comme le rapport de l'écart de pression ΔP de part et d'autre d'un capillaire et de la longueur d'un capillaire ℓ , ainsi

$$\frac{\Delta P}{\ell} = R_u D_m \quad ; \quad \Delta P = \frac{8\eta D_m \ell}{\pi \rho R^4}.$$

A.N.

$$\Delta P = \frac{8 \times 1,6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 7 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \times 5 \times 10^{-2} \text{ m}}{3 \times 1,1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times (10 \times 10^{-6} \text{ m})^4} \simeq 8 \times 0,5 \times 7 \times 5 \times 10^1 \text{ Pa}$$

$$\Delta P \simeq 1,4 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

D'après l'expression de la vitesse $v(r)$ obtenue plus tôt, comme $r < R$, une valeur de vitesse positive implique un gradient de pression $dP(z)/dz$ négatif. **La pression est donc la plus élevée en amont d'un capillaire typique.**

Q9 Du fait de la symétrie cylindrique d'un capillaire, les composantes radiales des forces de pression se compensent deux-à-deux, et seules les composantes orientées selon l'axe (Oz) sont à considérer. La puissance de ces forces est telle que

$$\mathcal{P}_P = \iint \vec{\delta F}_P \cdot \vec{v}(r) = \iint P(z)v(r)dS - \iint P(z+\ell)v(r)dS = \frac{\Delta P}{\rho} \iint \rho v(r)dS$$

soit

$$\mathcal{P}_P = \frac{\Delta P D_m}{\rho}.$$

Or, en utilisant la définition de la résistance linéique d'écoulement et l'expression précédente $\Delta P = R_u D_m \ell$, il vient que

$$\mathcal{P}_P = \frac{R_u D_m^2 \ell}{\rho}.$$

Q10 À partir de la première expression obtenue à la question précédente et des valeurs calculées plus tôt, on calcule la puissance des forces de pression reçue par un seul capillaire.

A.N.

$$\mathcal{P}_P = \frac{1,4 \times 10^3 \text{ Pa} \times 7 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}{1,1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \simeq 1 \times 10^{-10} \text{ W}.$$

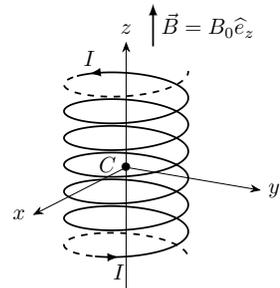
Ainsi pour $N = 1,6 \times 10^9$ capillaires, **c'est une puissance de près de 0,2 W qui est fournie par le cœur.**

Commentaire

En moyenne, un cœur délivre une puissance de l'ordre de 2 W[11]. Cet écart d'un ordre de grandeur entre cette valeur et le résultat obtenu provient, en grande partie, de l'approximation faite à la question **Q5** : nous n'avons pas tenu compte de la pesanteur. Pour lutter contre celle-ci le cœur doit imposer une pression systolique, pression associée à l'éjection du sang, dix fois plus importante que celle calculée plus haut : $15 \times 10^3 \text{ Pa}$. En tenant compte de cette valeur, la puissance calculée est compatible avec celle donnée dans la littérature.

II Le magnétron

- Q11** D'après la règle de la main droite, le bobinage doit avoir une géométrie cylindrique d'axe de symétrie (Cz) avec un enroulement orienté dans le sens direct dans le plan (Cxy) comme représenté ci-contre. De plus la valeur du champ magnétique B_0 est stationnaire si la valeur de l'intensité I du courant circulant dans le bobinage est constante. Enfin, afin d'assurer une valeur uniforme de B_0 , le rapport entre la longueur et le rayon du bobinage doit être important, de l'ordre de 10, afin d'éviter les effets de bords.



Commentaire

La représentation des lignes de champs d'une bobine permet de comprendre ces effets de bords. Au niveau des bords de la bobine les lignes s'écartent les unes des autres : la norme du champ magnétique est plus faible et la direction et le sens de ce dernier n'est plus constant. En deçà d'une valeur de l'ordre de 10 pour le rapport longueur sur rayon d'une bobine, on considère que la partie du volume de la bobine affecté par les effets de bords n'est plus négligeable devant la totalité de ce volume.

- Q12** D'après la définition du potentiel électrique

$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

En négligeant les effets de bords, on peut considérer que tout point de l'espace en $a \leq r \leq b$ se situe sur deux plans de symétrie de la répartition des charges électriques ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$) et (\hat{e}_r, \hat{e}_z). Le champ électrique est donc purement radial, ainsi

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \hat{e}_r.$$

De plus, le problème étant invariant par rotation selon θ et par translation selon z , le champ électrique et le potentiel électrique ne dépendent que de la coordonnée r .

D'après l'équation de Maxwell-Gauss il vient alors que

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} ; \quad \text{div} \left(-\frac{dV}{dr} \hat{e}_r \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} ; \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Comme l'espace entre l'anode et l'électrode est vide, on trouve que

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

En intégrant deux fois selon r

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r} ; \quad V(r) = A \ln r + B$$

avec A et B deux constantes d'intégration. D'après l'énoncé la différence de potentiel entre l'anode en $r = b$ et la cathode en $r = a$ est $V(b) - V(a) = U_0$, ainsi

$$U_0 = A \ln \left(\frac{b}{a} \right) ; \quad A = \frac{U_0}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}.$$

L'expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace est donc

$$V(r) = U_0 \frac{\ln r}{\ln \left(\frac{b}{a}\right)} + B.$$

Commentaire

L'expression précédente est une simplification de l'équation de Laplace dans le cas d'un potentiel radial sur laquelle on aurait pu baser notre travail. En effet, on peut montrer que dans le vide V respecte l'équation de Laplace

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad ; \quad -\operatorname{div} (\vec{\operatorname{grad}} V) = 0 \quad ; \quad \Delta V = 0.$$

On obtient l'expression de l'opérateur laplacien dans le système de coordonnées cylindriques à partir des formules du gradient et de la divergence fournies

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Comme l'énoncé confirme bien les conclusions de l'étude des symétries et des invariances de la distribution de charges en indiquant que le potentiel $V(r)$ ne dépend que de la coordonnée radiale, l'équation de Laplace se simplifie pour donner

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

Commentaire

Par définition, la dérivée spatiale d'un potentiel est liée à un champ. Ainsi, un potentiel est toujours défini à une constante près. Par exemple, ici, on peut choisir de prendre la cathode comme masse du système, cela revient à choisir la valeur de la constante B

$$B = -U_0 \frac{\ln a}{\ln \left(\frac{b}{a}\right)} \quad ; \quad V(r) = U_0 \frac{\ln \left(\frac{r}{a}\right)}{\ln \left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Mais cela importe peu car la grandeur portant l'information physique est la tension.

Q13 Considérons comme système un seul électron. De part sa faible masse, on peut négliger son poids devant la force de Lorentz \vec{F} qui s'applique sur lui. De plus, en le considérant comme un point matériel, on peut lui appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) en prenant comme référentiel le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre supposé galiléen. Ainsi

$$m_e \vec{a} = \vec{F} = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = -e \left(E(r) \hat{e}_r + B_0 \vec{v} \wedge \hat{e}_z \right)$$

car comme on l'a montré, le champ électrique est ici purement radial.

En projetant la relation sur l'axe (Oz) , il vient que

$$m_e a_z = 0 \quad \text{soit, en intégrant,} \quad v_z = \text{cst.}$$

D'après l'énoncé, les électrons émis par la cathode en $r = a$ le sont avec une faible vitesse, on peut donc considérer que la composante de la vitesse de l'électron selon l'axe (Oz) est nulle initialement $v_z(t=0) = 0$. Cette valeur étant constante, **le mouvement de l'électron s'effectue bien dans le plan** $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$.

Q14 Dans un référentiel galiléen, le théorème du moment cinétique (TMC) énonce que

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}(\vec{F}_i)$$

avec \vec{L}_O le moment cinétique d'un objet par rapport à un point O , et $\vec{M}(\vec{F}_i)$ le moment d'une des forces s'appliquant sur l'objet, toujours par rapport à un point O .

De part la géométrie du problème, on choisit ici C comme point de référence pour appliquer le TMC à l'électron. On exprime au préalable les vecteurs position \vec{r} et vitesse \vec{v} afin d'obtenir le vecteur moment cinétique \vec{L}_C

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad ; \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad ; \quad \vec{L}_C = \vec{r} \wedge m_e \vec{v} = m_e r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \vec{M}(\vec{F}) = r\hat{e}_r \wedge (-e(E(r)\hat{e}_r + B_0\vec{v} \wedge \hat{e}_z)) \\ &= -er\hat{e}_r \wedge ((\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) \wedge B_0\hat{e}_z) = -er\hat{e}_r \wedge (-\dot{r}B_0\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}B_0\hat{e}_r) \\ &= er\dot{r}B_0\hat{e}_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}er^2B_0\hat{e}_z \right) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d}{dt} (m_e r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} er^2 B_0 \hat{e}_z \right)$$

qui donne en intégrant par rapport au temps

$$m_e r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} er^2 B_0 + A \quad ; \quad \dot{\theta}(r) = \frac{eB_0}{m_e} + \frac{A}{m_e r^2}.$$

avec A une constante d'intégration à déterminer à partir d'une condition initiale. En utilisant de nouveau le fait que les électrons émis par la cathode en $r = a$ le sont avec une faible vitesse, on peut faire l'approximation que $\vec{v}(r = a) = \vec{0}$, soit $\dot{\theta}(r = a) = 0$, ainsi

$$0 = \frac{eB_0}{m_e} + \frac{A}{m_e a^2} \quad ; \quad A = -eB_0 a^2 \quad ; \quad \dot{\theta}(r) = \frac{eB_0}{2m_e} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

soit, avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$

$$\dot{\theta}(r) = \frac{\omega_c}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Commentaire

On aura reconnu ici la pulsation cyclotron $\omega_c = qB/m$. Cette pulsation correspond à la vitesse angulaire d'une particule de charge $\pm q$ et de masse m dans un champ magnétique \vec{B} uniforme. Les particules chargées négativement et positivement tournent respectivement dans le sens direct et indirect autour de \vec{B} .

Le sujet diffère de ce cas d'étude classique car il introduit en plus un champ électrique afin d'accélérer les particules. Néanmoins, les électrons tournent bien dans le sens direct autour de \vec{B}_0 , donc de \hat{e}_z .

Le courant dû à cette circulation de charge, compté positivement, est, orienté dans le sens opposé. D'après la règle de la main droite, ce courant est à l'origine d'un champ magnétique, de sens opposé à

B_0 , conformément à la loi de Lenz : les électrons s'opposent à leur mise en rotation par le champ B_0 en produisant un champ magnétique opposé. On traite cet aspect à la question **Q21**.

Q15 Au voisinage de l'anode, soit en $r = b$, l'électron a une vitesse angulaire

$$\dot{\theta}(r = b) = \frac{\omega_c}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{eB_0}{2m_e} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

L'onde électromagnétique émise par l'électron au voisinage de l'anode a une pulsation ω de valeur égale à cette vitesse angulaire, sa fréquence f_0 est donc telle que

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_c}{4\pi} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

La valeur du champ magnétique à imposer pour produire une onde de fréquence f_0 est

$$B_0 = \frac{4\pi m_e}{e} \frac{f_0}{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

En négligeant $a^2 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ devant $b^2 = 36 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, l'application numérique en ordre de grandeur donne

$$B_0 \simeq \frac{4\pi m_e f_0}{e} \simeq \frac{4 \times 3 \times 1 \times 10^{-30} \text{ kg} \times 2,5 \times 10^9 \text{ Hz}}{1,5 \times 10^{-19} \text{ C}} = 4 \times 2 \times 2,5 \times 10^{-2} \text{ T} = 0,2 \text{ T}.$$

Commentaire

Les magnétrons des fours à micro-ondes utilisent des aimants permanents produisant à leurs abords des champs magnétiques de l'ordre de 0,1 T à 1 T. La valeur trouvée précédemment semble donc être une valeur réaliste.

Q16 D'après le théorème de l'énergie mécanique, l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de l'électron se conserve car la partie électrique de la force de Lorentz correspond à une force conservative, et la partie magnétique ne travaille pas. **Le mouvement de l'électron est donc conservatif.** On peut ainsi écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(r = a) + \mathcal{E}_p(r = a) &= \mathcal{E}_c(r) + \mathcal{E}_p(r) \\ 0 - eV(r = a) &= \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - eV(r) \end{aligned}$$

en utilisant l'expression du potentiel obtenue plus tôt

$$\begin{aligned} -eU_0 \frac{\ln a}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} - eB &= \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - eU_0 \frac{\ln r}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} - eB \\ \dot{r}^2 &= \frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln \left(\frac{r}{a} \right)}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} - r^2 \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de la vitesse angulaire obtenue plus tôt, on obtient celle de la vitesse radiale

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln \left(\frac{r}{a} \right)}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} - \frac{r^2 e^2 B_0^2}{4m_e^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2}.$$

- Q17** D'après l'énoncé, les électrons doivent atteindre le voisinage immédiat de l'anode située en $r = b$ sans jamais entrer en contact avec elle. Il faut donc que leur vitesse radiale soit nulle en ce point, $\dot{r}(r = b) = 0$, ce qui implique

$$0 = \frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{b^2 e^2 B_0^2}{4m_e^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2 ; \quad U_0 = \frac{b^2 e B_0^2}{8m_e} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2 .$$

Commentaire

Il fallait bien exprimer U_0 en fonction de B_0 et non de B . Il s'agit d'une erreur de frappe.

- Q18** Les électrons ayant une trajectoire circulaire, leur vitesse et leur accélération sont telles que

$$\vec{v} = r\omega\hat{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -r\omega^2\hat{e}_r .$$

Une nouvelle application du PFD donne

$$-m_e r \omega^2 \hat{e}_r = -e \vec{E} - e B_0 \vec{v} \wedge \hat{e}_z ; \quad -m_e r \omega^2 \hat{e}_r = -e \vec{E} - r e B_0 \omega \hat{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = \frac{m_e r}{e} \left(\omega^2 - \frac{e B_0}{m_e} \omega \right) \hat{e}_r ; \quad \vec{E} = \frac{m_e r \omega}{e} (\omega - \omega_c) \hat{e}_r$$

un champ électrique radial et linéaire en r .

- Q19** D'après la définition du potentiel électrique, et dans le cas d'un champ électrique radial il vient que

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \hat{e}_r ; \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{m_e r \omega}{e} (\omega - \omega_c)$$

en intégrant selon r

$$V(r) = -\frac{m_e r^2 \omega}{2e} (\omega - \omega_c) + A$$

avec A une constante d'intégration.

La différence de potentiels entre l'anode en $r = b$ et la cathode en $r = a$ correspond à la tension U_0 , ainsi

$$U_0 = V(b) - V(a) ; \quad U_0 = -\frac{m_e \omega}{2e} (\omega - \omega_c) (b^2 - a^2) .$$

- Q20** D'après le théorème de Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} .$$

La densité volumique de charge est donc

$$\rho = \frac{\varepsilon_0}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{m_e r^2 \omega}{e} (\omega - \omega_c) \right) = \frac{2m_e \omega \varepsilon_0}{e} (\omega - \omega_c) .$$

Pour obtenir la densité particulaire des électrons, notée n , il suffit de diviser la densité volumique de charge par leur charge

$$n = -\frac{\rho}{e} = -\frac{2m_e\omega\varepsilon_0}{e^2}(\omega - \omega_c)$$

soit en utilisant l'expression de U_0 trouvée plus tôt

$$n = \frac{4U_0\varepsilon_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Q21 La rotation uniforme des électrons provoque l'apparition d'une densité de courant \vec{j} et d'un courant électrique d'intensité I telle que

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^\ell \int_a^b \rho \vec{v} \cdot d\vec{r} dz \hat{e}_\theta = \frac{2m_e\omega^2\varepsilon_0}{e}(\omega - \omega_c) \int_0^\ell dz \int_a^b r dr$$

$$I = \frac{m_e\omega^2\varepsilon_0\ell}{e}(\omega - \omega_c)(b^2 - a^2)$$

avec $d\vec{S}$ le vecteur surface élémentaire, illustré ci-après, donnant le sens du courant.

Les symétries et les invariances de la distribution des électrons nous permettent de déterminer celles du champ magnétique produit. Comme à la question **Q11**, on fait l'approximation que la hauteur ℓ du magnétron est très grande par rapport à a et b : on néglige ainsi les effets de bords en utilisant le modèle du solénoïde infini. Il y a donc une symétrie de distribution des courants selon le plan $(M, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$, avec M un point quelconque dans le magnétron, ainsi que des invariances par translation selon l'axe (Oz) et par rotation selon l'angle θ . Ainsi, le champ magnétique normal au plan de symétrie de la distribution de courant est

$$\vec{B}_e = B_e(r)\hat{e}_z.$$

Afin d'utiliser le théorème d'Ampère, on choisit un contour d'Ampère C à cheval dans la zone $a < r < b$ jusqu'à une position R à l'extérieur du magnétron comme illustré sur le schéma ci-contre.

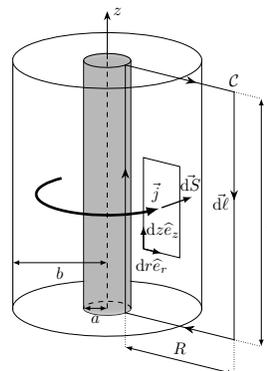
On oriente le contour d'Ampère C à l'aide de la règle de la main droite, afin de compter le courant positivement

$$\oint_C \vec{B}_e \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$\int_0^\ell \vec{B}_e \cdot dz \hat{e}_z + \int_r^R \vec{B}_e \cdot dr \hat{e}_r + \int_\ell^0 \vec{B}_e \cdot dz \hat{e}_z + \int_R^r \vec{B}_e \cdot dr \hat{e}_r = \frac{m_e\omega^2\mu_0\varepsilon_0\ell}{e}(\omega - \omega_c)(b^2 - a^2).$$

Comme le champ magnétique est dirigé selon l'axe (Oz) et est nul à l'extérieur de la zone $a < r < b$ d'après le modèle du solénoïde infini, seul le premier terme du membre de gauche de l'équation précédente est non nul. Ainsi

$$B_e = \frac{m_e\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{e}(\omega - \omega_c)(b^2 - a^2) = \frac{m_e\omega^2}{ec^2}(\omega - \omega_c)(b^2 - a^2).$$



On a montré que la vitesse angulaire des électrons est $\omega = 2\pi f_0$. Ainsi

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

A.N.

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(1 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{(6 \times 10^{-3} \text{ m})^2} \right) \simeq \frac{1}{2}.$$

On peut alors récrire la valeur B_e , en utilisant l'approximation $\omega \simeq \omega_c/2$

$$B_e = \frac{m_e \omega^2 \omega_c}{e c^2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} - 1 \right) (b^2 - a^2) \simeq -\frac{m_e \omega_c^3 b^2}{8 e c^2}$$

en négligeant a^2 devant b^2 . On peut alors exprimer le rapport du champ magnétique produit par les électrons, B_e , et le champ imposé B_0

$$\frac{B_e}{B_0} = -\frac{m_e \omega_c^3 b^2}{8 e c^2} \frac{e}{m_e \omega_c} = -\frac{\omega_c^2 b^2}{8 c^2} = -\frac{v_{\max}^2}{2 c^2}$$

avec $v_{\max} = \omega_c b/2 \simeq \omega b$ la valeur de la vitesse maximale atteinte par les électrons en $r = b$. Or

$$v_{\max} = \frac{\omega_c}{2} b = \frac{e B_0}{2 m_e} b.$$

A.N.

$$v_{\max} \simeq \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 0,2 \text{ T}}{2 \times 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}} \times 6 \times 10^{-3} \text{ m} \simeq 1,5 \times 0,1 \times 6 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 1 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{B_e}{B_0} \simeq -\frac{1}{2} \left(\frac{1 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \right)^2 = -\frac{1}{18}.$$

On constate que le champ magnétique produit par les électrons, B_e , est presque vingt fois plus faible et opposé au champ magnétique B_0 . **L'hypothèse consistant à considérer le champ magnétique comme inchangé est donc raisonnable.**

Commentaire

Le modèle du solénoïde infini implique, d'après les considérations de symétries et d'invariances de la distribution de courant, que le champ \vec{B}_e soit orienté selon \hat{e}_z et ne dépende, a priori, que de la coordonnée radiale r . Mais ce modèle a d'autres conséquences. Comme les lignes de champs à l'extérieur du solénoïde se referment à l'infini, leur densité est nul, ainsi que la valeur du champ à l'extérieur. En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour \mathcal{C} qui ne recoupe aucun courant à l'intérieur du solénoïde, il vient que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = 0 \quad ; \quad B_e(r)\ell - B_e(r')\ell = 0$$

avec r et r' deux coordonnées inférieure au rayon du solénoïde, et ℓ la longueur de \mathcal{C} . Ainsi $B_e(r) = B_e(r')$: le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini.

Commentaire

Les magnétrons sont employés principalement dans les radars et dans les fours à micro-ondes. L'invention du four à micro-ondes est souvent rapportée sous une forme romancée : Percy Spencer, un ingénieur travaillant sur le magnétron d'un radar, constate que la barre chocolatée qu'il a dans sa poche fond sous l'action de ce dernier. En réalité, si Percy Spencer est bien un des premiers cadres de l'entreprise Raytheon à montrer de l'intérêt pour la capacité des ondes micro-ondes à chauffer des objets, la découverte de ce phénomène et son exploitation sont le résultat d'observations réalisées par plusieurs personnes[9].

III Lévitiation magnétique

Q22 L'aimantation \vec{M} est de même dimension que l'excitation magnétique \vec{H} , **la susceptibilité magnétique χ est donc sans dimension.**

Par définition, la relation entre l'excitation magnétique et le champ magnétique \vec{B} est

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

La perméabilité magnétique est définie telle que

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

En utilisant la relation précédente, on voit que

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \quad \text{donc} \quad \mu_r = 1 + \chi.$$

Commentaire

Dans la représentation utilisée, le terme d'excitation magnétique \vec{H} est justifié car il est lié au courant externe imposé au matériau. L'aimantation \vec{M} est, elle, liée au courant interne dépendant du matériau. Ces deux champs contribuent au champ magnétique total $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, la grandeur qui agit effectivement sur les charges et les courants.

De manière analogue, le vecteur déplacement électrique \vec{D} est lié à la densité de charges externe au matériau, c'est pourquoi on l'appelle parfois excitation électrique. La polarisation électrique \vec{P} , elle, est liée à la densité de charges interne. Ces deux champs contribuent au champ électrique total $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P})$.

Q23 Les lignes de champs étant des droites parallèles à l'axe (Oz) à l'intérieur du milieu magnétique, cela signifie que la valeur du champ magnétique est constant le long de cette axe. Il vient donc que

$$\vec{B} = B_0(z) \hat{e}_z = B_0 \hat{e}_z$$

donc que le champ magnétique est uniforme dans le milieu magnétique. Comme on a montré que la valeur du champ magnétique \vec{B} est proportionnelle à celle de l'excitation magnétique \vec{H} , elle-même proportionnelle à celle de l'aimantation \vec{M} , **les trois champs sont uniformes dans le milieu magnétiques.**

On peut calculer la valeur de l'excitation magnétique à l'aide du théorème d'Ampère dans un milieu matériel, soit

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{entre}$$

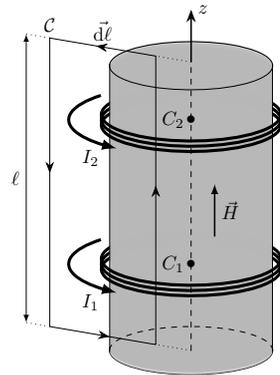
avec C le contour d'Ampère qui est le rectangle de hauteur ℓ à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du milieu représenté ci-contre, et $I_{entre} = N_1 I_1 + N_2 I_2$ la somme des intensités des courants entrelacés par le contour.

Le champ magnétique étant nul à l'extérieur et orienté selon \hat{e}_z à l'intérieur, l'excitation magnétique l'est également, ainsi l'intégrale curviligne se réduit à

$$\int_0^\ell H dz = N_1 I_1 + N_2 I_2 \quad ; \quad H = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\ell}.$$

En utilisant la relation $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ il vient que

$$B_0 \hat{e}_z = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad ; \quad B_0 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\ell}.$$



Q24 Les flux magnétiques traversant chaque bobine sont

$$\varphi_1 = \varphi_{p,1} + \varphi_{2 \rightarrow 1} = L_1 I_1 + M_0 I_2 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \varphi_{p,2} + \varphi_{1 \rightarrow 2} = L_2 I_2 + M_0 I_1$$

avec $\varphi_{p,1}$ et $\varphi_{p,2}$ les flux propres de chaque bobine, et $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ et $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ les flux des champs magnétiques respectivement produits par la bobine 2 et la bobine 1, traversant l'autre bobine.

Ces flux sont aussi tels que

$$\varphi_1 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = N_1 \pi R^2 B_0 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{S}_2 = N_2 \pi R^2 B_0$$

avec \vec{S}_1 et \vec{S}_2 les vecteurs surfaces de chacune des bobines.

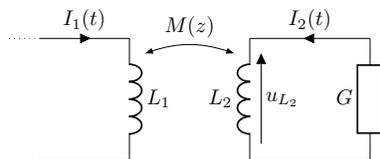
Il vient donc que

$$\begin{aligned} N_1 \pi R^2 B_0 &= L_1 I_1 + M_0 I_2 \quad ; \quad N_2 \pi R^2 B_0 = L_2 I_2 + M_0 I_1 \\ \mu_0 \mu_r N_1 \pi R^2 \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\ell} &= L_1 I_1 + M_0 I_2 \quad ; \quad \mu_0 \mu_r N_2 \pi R^2 \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\ell} = L_2 I_2 + M_0 I_1. \end{aligned}$$

Par identification on voit que

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 \pi R^2}{\ell} \quad ; \quad L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 \pi R^2}{\ell} \quad ; \quad M_0 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{\ell}.$$

Q25 On représente la situation par le schéma électrique ci-contre. En appliquant la loi des mailles sur le circuit formé par la spire N°2 il vient que



$$u_{L_2} + \frac{I_2}{G} = 0 \quad ; \quad L_2 \frac{dI_2}{dt} + M(z) \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_2}{G} = 0.$$

En utilisant la représentation complexe, en régime harmonique forcé, on peut écrire

$$j\omega L_2 \underline{I_2} + j\omega M(z) \underline{I_1} + \frac{I_2}{G} = 0 \quad ; \quad \underline{I_2} = -\underline{I_1} \frac{j\omega M(z) G}{1 + j\omega L_2 G}.$$

En développant

$$\underline{I_2} = -\frac{I}{1 + \omega^2 L_2^2 G^2} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) (\omega^2 L_2 M(z) G^2 + j\omega M(z) G).$$

L'intensité du courant dans la spire N°2 correspond à la partie réelle de la dernière expression, soit

$$I_2(t) = I \left[\frac{\omega M(z) G}{1 + \omega^2 L_2^2 G^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega^2 L_2 M(z) G^2}{1 + \omega^2 L_2^2 G^2} \cos(\omega t) \right].$$

On peut ainsi identifier les fonctions $\beta(z)$ et $\alpha(z)$

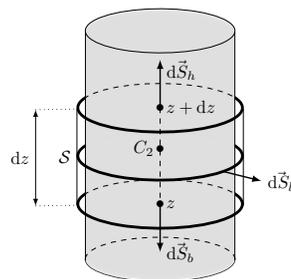
$$\beta(z) = \frac{\omega M(z) G}{1 + \omega^2 L_2^2 G^2} \quad \text{et} \quad \alpha(z) = \frac{\omega^2 L_2 M(z) G^2}{1 + \omega^2 L_2^2 G^2}.$$

Q26 Utilisons l'équation de Maxwell-Flux ou Maxwell-Thomson sous forme intégrale

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Cette équation traduit la conservation du flux magnétique. On choisit d'étudier la conservation du flux du champ magnétique $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ produit par la spire N°1 à travers la spire N°2. Pour cela on choisit une surface S correspondant à un cylindre entourant la spire N°2 centré sur l'axe (Oz) , de rayon R et de hauteur dz infinitésimale.

En décomposant cette intégrale sur les deux bases circulaires du haut et du bas du cylindre, respectivement S_h et S_b , et sur la face latérale S_l , il vient que



$$\begin{aligned} \iint_{S_h} \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{S}_h + \iint_{S_b} \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{S}_b + \iint_{S_l} \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{S}_l &= 0 \\ \iint_{S_h} \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \cdot \hat{e}_z r dr d\theta + \iint_{S_b} \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \cdot (-\hat{e}_z r dr d\theta) + \iint_{S_l} \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \cdot R d\theta dz \hat{e}_r &= 0 \end{aligned}$$

On peut faire l'approximation, qu'à l'instar du champ total \vec{B} , le champ $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$, et donc ses composantes, ne dépendent que de la coordonnée z . Dans le cas de la composante selon \hat{e}_r , dz est infinitésimale, on peut donc considérer que la composante varie très peu sur cette distance. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^{2\pi} B_z(z+dz) r dr d\theta - \int_0^R \int_0^{2\pi} B_z(z) r dr d\theta + RB_r dz \int_0^{2\pi} d\theta &= 0 \\ \pi R^2 (B_z(z+dz) - B_z(z)) + 2\pi R B_r dz &= 0 \\ B_r &= -\frac{R}{2} \frac{B_z(z+dz) - B_z(z)}{dz} = -\frac{R}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}. \end{aligned}$$

en reconnaissant la dérivée par rapport à z lorsque dz tend vers 0.

On peut exprimer la composante $B_z(z)$ à partir de $\varphi_{1 \rightarrow 2}$, le flux du champ magnétique $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ produit par la spire N°1 à travers la surface offerte par la spire N°2 positionnée en z . Le vecteur surface associé à la spire N°2 est $\vec{S}_2 = N_2 \pi R^2 \hat{e}_z$. Ainsi

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = M(z) I_1(t) = M_0 f(z) I_1(t) \quad \text{et} \quad \varphi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \pi R^2 B_z(z)$$

la composante $B_z(z)$ étant uniforme pour une altitude z fixée. Il vient que

$$B_z(z) = \frac{M_0}{N_2 \pi R^2} I_1(t) f(z) = \frac{\mu_0 \mu_r N_1}{\ell} I_1(t) f(z).$$

et donc

$$B_r = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 R}{2\ell} I_1(t) \frac{df(z)}{dz}$$

Q27 Calculons la résultante de la force de Laplace \vec{F}_L sur le contour de la spire N°2, noté C_2 , due au champ magnétique $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \int_{C_2} N_2 I_2(t) d\vec{l} \wedge \vec{B}_{1 \rightarrow 2} = \int_0^{2\pi} N_2 I_2(t) R d\theta \hat{e}_\theta \wedge (B_r \hat{e}_r + B_z(z) \hat{e}_z) \\ &= N_2 I_2(t) R \int_0^{2\pi} (B_z(z) \hat{e}_r - B_r \hat{e}_z) d\theta. \end{aligned}$$

Comme $B_z(z)$ est constant pour z fixé, les composantes radiales s'annulent deux à deux, donc

$$\vec{F}_L = -N_2 I_2(t) 2\pi R B_r \hat{e}_z = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{\ell} I_1(t) I_2(t) \frac{df(z)}{dz} \hat{e}_z.$$

La valeur moyenne de cette force sur une période est

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}_L \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F}_L dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{\ell} I_2^2 \frac{df(z)}{dz} (\beta(z) \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \alpha(z) \cos^2(\omega t)) \hat{e}_z dt. \end{aligned}$$

Les valeurs moyennes de $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$ et $\cos^2(\omega t)$ étant respectivement 0 et 1/2, il vient que

$$\langle \vec{F}_L \rangle = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{2\ell} I_2^2 \alpha(z) \hat{e}_z = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{2\ell} I_2^2 \frac{\omega^2 L_2 M_0 G^2}{1 + \omega^2 L_2^2 G^2} f(z) \frac{df(z)}{dz} \hat{e}_z$$

soit

$$\langle \vec{F}_L \rangle = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{4\ell} I_2^2 \frac{\omega^2 L_2 G^2}{1 + \omega^2 L_2^2 M_0 G^2} \frac{df^2(z)}{dz} \hat{e}_z.$$

La fonction $f(z)$ étant positive monotone décroissante, $f^2(z)$ l'est également. **Le signe de la force implique donc qu'elle est orientée vers les z positifs**, ce qui provoque l'éloignement de la spire N°2 de la spire N°1 : c'est ce qu'on appelle le phénomène de **lévitation magnétique**.

Commentaire

Cette force de Laplace est due à l'induction d'un courant d'intensité $I_2(t)$ par le champ magnétique $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ produit par la spire N°1. Lorsque la position en z de la spire N°2 diminue, elle se rapproche de la spire N°1 où le champ $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ est d'autant plus important, ce qui provoque alors une augmentation de la force de Laplace, éloignant la spire N°2 de la spire N°1. Ce phénomène de lévitation suit bien la loi de Lenz : les causes de l'induction s'opposent aux effets qui leur ont donné naissance.

2 - Physique 2 2023

Mines Ponts Physique 2 PSI 2023

Présentation

Thèmes abordés : *MÉCANIQUE DES FLUIDES : bilan de quantité de mouvement, forces de portance et de traînée, bilan de matière, champ de vitesse, relation de Bernoulli. MÉCANIQUE : théorème de la résultante de la dynamique. ONDES : propagation, relation de dispersion.*

Commentaires

L'épreuve explore les aspects physiques de la navigation en planche à voile et la formation des vagues en se basant sur des notions de mécanique des fluides et de mécanique ondulatoire.

La première partie du sujet traite de la propulsion des planches à voile. On peut expliquer le déplacement d'une planche dans le sens du vent, mais également dans le sens opposé, à partir de quelques connaissances fondamentales en mécanique, de nombreuses informations fournies et une maîtrise correcte de notions géométriques et de calculs vectoriels.

La deuxième partie vise à établir les équations de description des vagues. Elle présente un aspect calculatoire, qui requiert tout de même une bonne compréhension de certaines notions de mécanique des fluides et de mécanique ondulatoire, mais qui reste accessible de part les nombreuses relations à démontrer.

Le sujet est dans l'ensemble abordable, laissant une grande place au calcul et demandant un minimum de sens physique et de connaissances.

Extrait du rapport du jury

«La totalité du sujet était accessible, de longueur raisonnable, et chaque question a été traitée. Le jury remarque toutefois que de nombreux candidats ont délaissé (ou presque) toute une partie du sujet, le plus souvent la première.»

«Les notions de géométrie élémentaire sont souvent méconnues, ou mal utilisées. [...] les conclusions sont souvent précipitées, après de nombreuses confusions d'ordre calculatoire [...] les raisonnements physiques reposent sur des schémas, qui sont souvent absents, même lorsqu'ils sont explicitement demandés par l'énoncé.»

Mines Ponts Physique 2 PSI 2023**Énoncé**

A2023 – PHYSIQUE II PSI



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 9 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Planche à voile et vagues.

Ce sujet étudie de manière quantitative la physique des sports de voile. Dans la première partie, nous proposons une étude détaillée des différentes forces qui permettent à une planche à voile d'avancer sur l'eau en présence de vent sur une mer calme. Dans la seconde partie, on étudie la formation des vagues à la surface de la mer. Ces deux parties sont totalement indépendantes. Les vecteurs sont repérés par des flèches (\vec{v}) sauf s'ils sont unitaires, ils sont alors spécifiés par des chapeaux (\hat{e}_x). Les applications numériques seront fournies avec 2 chiffres significatifs.

I Étude de la planche à voile.

La première partie porte sur l'étude de la propulsion des planches à voile, dans un modèle simplifié. Afin de comprendre les différents phénomènes physiques responsables du déplacement de la planche à voile sur un plan d'eau ainsi que des changements de directions de la planche, nous allons nous intéresser tout d'abord à la force propulsive associée au vent.

I.A Navigation par vent arrière.

Dans un premier temps, on considère une planche à voile qui se déplace dans la même direction que le vent. La vitesse du vent est supposée constante, elle est caractérisée par le vecteur $\vec{v}_v = v_v \hat{e}_x$. La vitesse de la planche à voile est caractérisée par le vecteur $\vec{v}_p = v_p \hat{e}_x$, colinéaire à \vec{v}_v , et telle que $\vec{v}_v \cdot \vec{v}_p > 0$.

La voile est assimilée à un triangle isocèle plein de surface S , dont l'un des deux côtés de longueur identique a constitue le mât de la voile. L'angle au sommet symétrique du triangle isocèle est appelé α . Le mât de la voile fait un angle θ avec la verticale. Le poids du mât sera négligé dans cette partie. Le point d'attache du mât sur la planche est noté O .

Dans cette sous-partie, nous supposons que le plan de la voile est orthogonal à la fois à la direction du vent et au plan contenant la planche. Le plan de la planche est supposé horizontal. Ces différentes informations sont récapitulées sur la figure 1 ci-dessous.

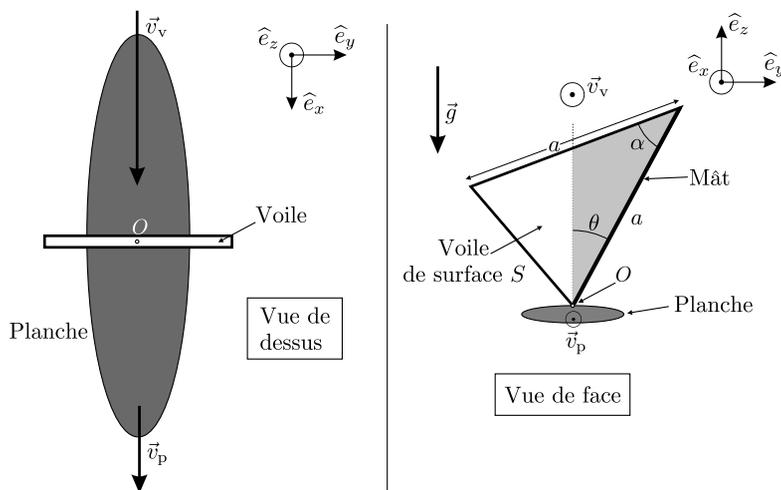


FIGURE 1 – Représentation schématisée de la planche et de sa voile.

Afin d'estimer la force propulsive du vent dans la voile dans cette configuration particulière, le modèle le plus simple consiste à supposer que l'air est un gaz homogène composé de particules de masse m se déplaçant à une vitesse \vec{v}_v . Lors du choc avec la voile, ces particules cèdent intégralement leur quantité de mouvement à la voile. On admet que le temps caractéristique τ associé à la collision d'une particule d'air avec la voile correspond à celui du transfert de sa quantité de mouvement. On négligera les effets de bord dans ce modèle.

- – 1. Exprimer le nombre N de particules d'air qui entrent en collision avec la voile pendant un temps τ en fonction de m , S , v_v , τ et de la masse volumique de l'air notée ρ_a .
- – 2. En précisant les hypothèses nécessaires, déterminer l'expression de la force \vec{f} associée à l'impact d'une molécule.
- – 3. En déduire l'expression de la force propulsive \vec{F} exercée dans la voile par le vent en fonction de ρ_a , v_v et S .

Il existe une valeur d'angle $\theta = \theta_d$ pour laquelle le mode de propulsion envisagé permet un déplacement en ligne droite dans la direction du vent, sans dérive ou changement de direction. Dans cette configuration, notée \mathcal{S} , la force propulsive se répartit symétriquement sur les deux parties de la voile séparées par l'axe (O, \hat{e}_z) .

- – 4. Établir l'expression de S en fonction de a et α .

Établir l'expression de la surface S' de la voile située à la droite de la verticale et représentée en grisé sur la vue de face de la figure 1. On exprimera S' en fonction de a , α et θ .

En déduire que la configuration \mathcal{S} est caractérisée par la relation

$$\tan \theta_d = \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}.$$

Déterminer la valeur numérique de θ_d pour une voile dont l'angle au sommet est $\alpha = 60^\circ$.

Le modèle simple de collision entre les molécules d'air et la voile ne donne qu'une estimation de l'ordre de grandeur de la force propulsive sur la voile. En effet, ce modèle néglige complètement la mécanique des fluides autour de la voile. En particulier, les écoulements de l'air autour de la voile ne sont pas pris en compte. Lors de la mesure de ces écoulements en soufflerie avec une voile fixe, rigide et perpendiculaire au vent, on trouve une force propulsive phénoménologique colinéaire à la direction du vent de la forme

$$\vec{F}_{\text{pro}} = \frac{1}{2} \rho_a C_v S v_v^2 \hat{e}_x \quad (1)$$

Dans cette relation, le coefficient sans dimension C_v dépend de plusieurs facteurs dont la courbure de la voile, son orientation par rapport à l'écoulement moyen mais aussi et dans une moindre mesure de la vitesse du vent. Nous supposons par la suite que la force propulsive est donnée par la relation (1), avec un coefficient C_v indépendant de la vitesse du vent.

Par ailleurs, le déplacement de la planche à la surface de l'eau engendre une force résistante entre la planche et l'eau, qui dépend de la vitesse de la planche par rapport à l'eau. Nous supposons pour simplifier que cette force est de direction opposée à la force propulsive, et que son intensité est donnée par une relation inspirée de la relation (1), soit

$$\vec{F}_{\text{res}} = -\frac{1}{2} \rho_e C_p S_p v_p^2 \hat{e}_x \quad (2)$$

dans laquelle on a utilisé maintenant la masse volumique ρ_e de l'eau, la surface de frottement effective entre la planche et l'eau S_p et le coefficient sans dimension C_p .

- – 5. Lorsque la planche à voile se déplace à une vitesse \vec{v}_p , quelle est l'expression de la vitesse du vent qui souffle dans la voile relativement au référentiel entraîné avec la planche ? Ce vent s'appelle le vent *apparent*, sa vitesse est notée \vec{v}_{va} , **c'est elle qu'il faut prendre en compte dans l'expression (1) de la force propulsive** .
- – 6. En supposant un mouvement uniforme de la planche à voile à la vitesse \vec{v}_p , exprimer la norme de cette vitesse en fonction de v_v et de la quantité $\sigma = \sqrt{\frac{\rho_a C_p S_p}{\rho_a C_v S}}$. Est-il possible pour la planche à voile d'aller plus vite que le vent ?

I.B Navigation « au près ».

Jusqu'à présent, le déplacement de la planche à voile a été décrit dans le même sens que le vent. On considère maintenant une planche à voile qui « remonte au vent ». Cela veut dire en pratique que le produit scalaire de la vitesse du vent par celle de la planche à voile est négatif $\vec{v}_v \cdot \vec{v}_p < 0$.

Afin de préciser les choses, on définit la direction de navigation comme l'angle β_0 entre la vitesse du vent et celle de la planche de telle manière que : $\vec{v}_v \cdot \vec{v}_p = -v_v v_p \cos \beta_0$, avec $0 < \beta_0 < \pi/2$, $v_v = \|\vec{v}_v\|$ et $v_p = \|\vec{v}_p\|$.

Cet angle β_0 est représenté sur la figure 2 ci-dessous sur laquelle on a également indiqué la présence d'une dérive sous la planche. Cette dérive, placée sur l'axe de symétrie de la planche, assure la stabilité du mouvement et permet l'appui nécessaire pour orienter la vitesse de la planche dans une direction différente de celle du vent. Son effet sera pris en compte dans notre modèle de façon effective.

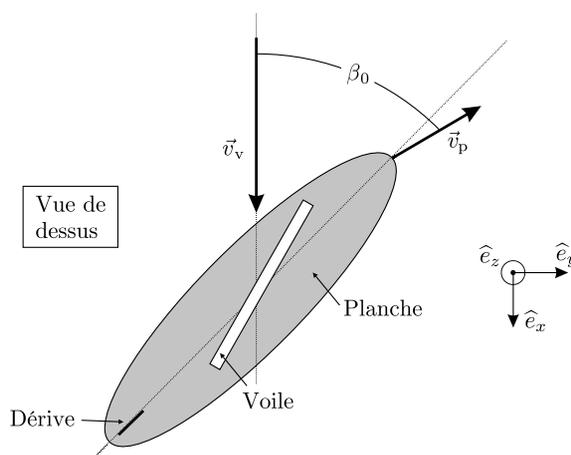


FIGURE 2 – La planche remonte le vent.

- – 7. Dans le cas d'une planche qui remonte au vent, démontrer que la norme v_{va} de la vitesse \vec{v}_{va} du vent apparent est supérieure à celle de la vitesse \vec{v}_v du vent réel.

Lorsque la planche à voile se déplace en remontant au vent, l'orientation de la voile par rapport au vent apparent influence fortement la force générée par le vent. Des mesures en soufflerie permettent de montrer que la voile se comporte dans ce cas de manière similaire à une aile d'avion : le vent génère d'une part une force dans la direction orthogonale à celle du vent apparent et d'autre part une force dans la même direction et le même sens que le vent apparent.

Ces deux forces sont appelées respectivement la force de *portance* et la force de *traînée*. Elles sont données par les deux relations ci-dessous et représentées sur la figure 3 :

$$\vec{F}_{\text{por}} = \frac{1}{2}\rho_a C_{v,\perp}(\beta) S v_{\text{va}}^2 \hat{e}_{\perp,a} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{tra}} = \frac{1}{2}\rho_a C_{v,\parallel}(\beta) S v_{\text{va}}^2 \hat{e}_{\parallel,a} \quad (3)$$

Les coefficients C de portance et de traînée dépendent de l'angle β entre le vent apparent et le plan moyen de la voile. Cet angle dit d'attaque est également représenté sur la figure 3. Dans ces relations, les vecteurs $\hat{e}_{\parallel,a}$ et $\hat{e}_{\perp,a}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires associés aux directions parallèle et normale au vent apparent.

Les deux forces de portance et de traînée constituent les composantes de la force propulsive \vec{F}_{pro} qui s'exerce dans la voile au sein de la base $(C_E; \hat{e}_{\perp,a}; \hat{e}_{\parallel,a})$, où C_E désigne le centre des efforts de la voile, c'est-à-dire le point d'application de la force propulsive totale.

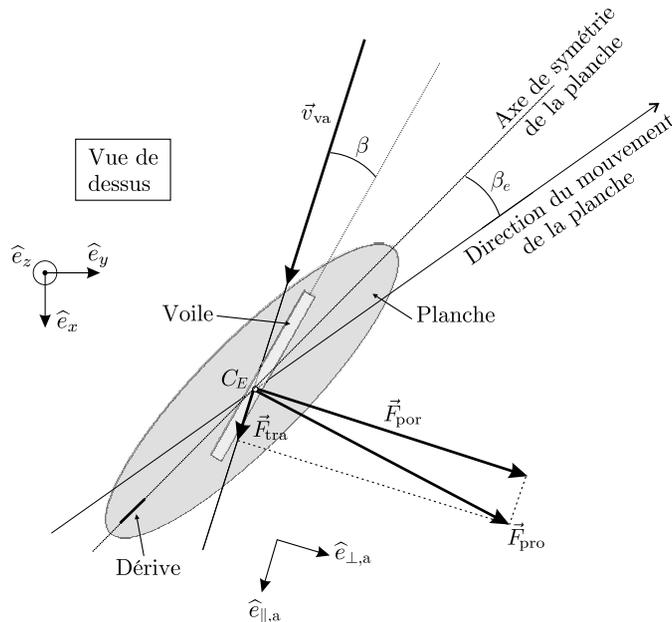


FIGURE 3 – Force propulsive au près.

- – 8. On suppose que la vitesse de la planche à voile est constante en module et direction, en présence de la force propulsive \vec{F}_{pro} . Que peut-on dire sur l'intensité de la force \vec{F}_{res} qui s'oppose au mouvement, et qui a pour origine les frottements entre la planche, sa dérive et l'eau ?

En reprenant les vecteurs utiles déjà représentés, compléter sur votre copie la figure 3 en indiquant la vitesse de la planche à voile \vec{v}_p (dont la norme sera choisie arbitrairement), la vitesse du vent \vec{v}_v ainsi que la force résistive \vec{F}_{res} . On fera l'hypothèse que la force propulsive et la force résistive appartiennent à deux plans distincts mais parallèles à l'horizontal, en négligeant ainsi les bilans de forces dans la direction verticale.

La force \vec{F}_{res} (qui s'oppose au mouvement) possède des caractéristiques similaires à celle qui propulse la planche à voile. Elle est associée à l'écoulement relatif de l'eau sur la planche, d'une part, et sur sa dérive, d'autre part.

La résultante globale comporte ainsi deux composantes dans le plan horizontal : une composante le long de la direction de déplacement dans l'eau, mais de sens opposé à la vitesse de la planche, et une autre composante dans la direction perpendiculaire.

On peut écrire ces deux composantes de la manière suivante :

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{1}{2}\rho_e C_{p,\parallel}(\beta_e) S_p v_p^2 \hat{e}_{\parallel,p} \text{ et } \vec{F}_{\perp} = \frac{1}{2}\rho_e C_{p,\perp}(\beta_e) S_p v_p^2 \hat{e}_{\perp,p} \quad (4)$$

Les coefficients de proportionnalité $C_{p,\parallel}(\beta_e)$ et $C_{p,\perp}(\beta_e)$ dépendent de l'angle β_e entre l'axe de symétrie de la planche dans le plan horizontal et la direction du déplacement. Cet angle est représenté sur la figure 3. On précise que $C_{p,\perp}(\beta_e = 0) = 0$.

- – 9. On se place dans les mêmes conditions que la question précédente (vitesse constante, force propulsive donnée). Expliquer pourquoi un tel déplacement uniforme n'est possible que si $\beta_e \neq 0$.
- – 10. Montrer que dans le cas d'un déplacement uniforme, on a la relation

$$v_p^2 + v_v^2 + 2v_p v_v \cos \beta_0 = \sigma_1 v_p^2, \quad (5)$$

dans laquelle on précisera l'expression de σ_1 en fonction des données ainsi que des divers coefficients de portance et de trainée de la voile et de la planche.

- – 11. Montrer que si $0 < \beta_0 < \pi/2$ alors $\sigma_1 > 1$.
La valeur précise du paramètre σ_1 dépend à la fois des caractéristiques intrinsèques de la voile et de la planche, mais aussi du navigateur. Ce dernier peut en effet ajuster l'angle entre la voile et la direction de la planche de manière à obtenir la valeur de σ_1 qui permet d'obtenir la plus grande valeur possible de la vitesse de la planche dans le régime de déplacement uniforme.
- – 12. En supposant une valeur constante pour σ_1 et en utilisant la relation (5), montrer que la vitesse de la planche peut être supérieure à la vitesse du vent à condition que

$$\cos \beta_0 > \frac{\sigma_1 - 2}{2}.$$

- – 13. En supposant toujours une valeur constante pour σ_1 , comment choisir la direction de navigation β_0 pour obtenir la vitesse de la planche la plus grande possible ?
- – 14. Pour une direction de navigation fixe β_0 , comment choisir la valeur de σ_1 pour obtenir la vitesse maximale ?

II Physique des vagues.

On considère un fluide étudié dans un référentiel galiléen $\{O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$.

Un point de ce fluide, repéré par le vecteur $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, est caractérisé par une masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ et un champ de vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$. La pression au sein du fluide est notée $p(\vec{r}, t)$. Pour simplifier l'étude, nous supposons que le système est invariant par translation dans la direction (O, \hat{e}_y) , de telle sorte que la densité, la pression et la vitesse ne dépendent, en plus du temps t , que des deux coordonnées spatiales x et z . En particulier, la vitesse du fluide dans la direction y est nulle.

Pour établir les équations qui permettront de décrire les vagues de surface, nous procéderons par étapes. Dans un premier temps, nous établirons les équations générales décrivant le champ de vitesse du fluide accompagnées des conditions aux limites particulières du problème. Nous chercherons, dans un second temps, la solution qui décrit les vagues en nous limitant aux régimes des faibles vitesses et des faibles amplitudes.

II.A Les équations de la vague linéaire.

- – 15. En faisant un bilan de matière dans un petit volume $d\tau = dx dy dz$ pendant un temps élémentaire dt , établir la loi de conservation de la matière reliant $\rho(x, z, t)$, $u_x(x, z, t)$ et $u_z(x, z, t)$, où $u_x = \vec{u} \cdot \hat{e}_x$ et $u_z = \vec{u} \cdot \hat{e}_z$.
- – 16. Dans le cas où le fluide est incompressible, démontrer que cette relation devient simplement

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 .$$

On suppose dorénavant que l'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire que $\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$.

Cette hypothèse permet de définir un potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$ associé au champ de vitesse et qui vérifie $\vec{u} = \text{grad}(\phi)$

- – 17. Montrer que le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0 .$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide de volume infinitésimal $d\tau$ permet d'établir une équation décrivant la dynamique du fluide.

Dans le cadre de cette description, la dérivée totale d'un champ scalaire quelconque $A(x, z, t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}A .$$

Par conséquent, en négligeant les effets de viscosité dans le fluide et en supposant que le mouvement du fluide est irrotationnel, le principe fondamental de la dynamique dans un champ de pesanteur $\vec{g} = g\hat{e}_z$ s'écrit :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] = -\rho g \hat{e}_z - \text{grad}(p) . \quad (6)$$

Cette relation est appelée relation d'Euler en mécanique des fluides. Le terme de gauche désigne l'accélération de la particule de fluide, prenant en compte en particulier la dérivée particulaire, le premier terme de droite désigne la force de pesanteur, et le dernier terme désigne la contribution des forces de pression.

- – 18. Montrer que la relation d'Euler permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction que l'on ne cherchera pas à déterminer mais qui ne dépend que du temps.

Quel résultat classique retrouve-t-on dans le cas d'un écoulement stationnaire ?

Nous admettrons par la suite qu'il est possible de choisir une fonction $f(t) = f_0$ qui est indépendante du temps sans perte de généralité. On choisit $f_0 = p_0/\rho$, où p_0 est la pression atmosphérique immédiatement au-dessus de la surface du fluide. Nous supposons que la pression atmosphérique est constante dans l'espace et dans le temps.

À ce stade, il est possible de spécifier quelques conditions aux limites du problème.

Le fluide est contenu dans un réservoir. La surface libre du fluide est caractérisée par un profil de hauteur $z = \eta(x, t)$. Le fond du réservoir est situé à une altitude $z = -H$, de telle sorte que le plan $z = 0$ correspond à la surface du fluide au repos, sans la présence de vague. La vitesse du fluide dans la direction verticale est nulle sur le fond du réservoir :

$$u_z(x, z = -H, t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0 . \quad (7)$$

- – 19. Montrer que, sur la surface libre $z = \eta(x, t)$, on a la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8)$$

- – 20. Déterminer l'expression de la pression $p(x, z = \eta, t)$ à la surface du fluide.

En déduire une seconde condition de surface libre :

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \Big|_{z=\eta} \quad (9)$$

Il n'est généralement pas possible de résoudre de façon générale les équations de la dynamique des fluides (ici conservation de la matière et Euler) avec les conditions aux limites discutées dans les questions précédentes.

Il est cependant possible de linéariser ces équations et ces conditions aux limites. On se place pour cela dans une limite de faible vitesse et de faible amplitude pour une vague de surface. Les premiers travaux en ce sens ont été menés par Joseph-Louis Lagrange dès le XIII^e siècle. Sous ces hypothèses, on peut linéariser les conditions de surface libre (8) et (9) qui deviennent

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \text{et} \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

et qui sont écrites sur la position de la surface libre au repos.

Pour trouver une solution décrivant la dynamique du fluide sous l'hypothèse de faible vitesse et faible amplitude, il ne reste plus qu'à trouver un potentiel de vitesse solution de l'équation de Laplace et satisfaisant ces conditions aux limites du problème. Pour ce faire, on utilise la méthode de séparation des variables en cherchant cette solution sous la forme $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$.

- – 21. Montrer que les fonctions $X(x, t)$ et $Z(z)$ sont solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z \end{cases}$$

où μ est une constante qui ne dépend ni des coordonnées spatiales ni du temps.

On peut montrer par des arguments de symétrie que $\mu > 0$.

La solution $X(x, t)$ est alors de forme sinusoïdale comme il est possible de s'y attendre dans le cadre d'un modèle de vague se propageant le long de la direction x .

Pour la fonction définissant la surface libre du fluide, nous choisirons une forme d'onde plane progressive $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ de nombre d'onde k , de pulsation ω et d'amplitude A , constante.

- – 22. En utilisant l'une des conditions de surface au repos montrer que les expressions

$$X(x, t) = \sin(kx - \omega t) \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=0} = \gamma = cste$$

résolvent le problème. On exprimera la constante γ en fonction de A et ω .

- – 23. En utilisant les résultats précédents complétés par la condition (7) au fond du réservoir, montrer qu'alors

$$Z(z) = \zeta \frac{\cosh[k(z + H)]}{\sinh(kH)}$$

où l'on exprimera la constante ζ en fonction de A , ω et k . La solution totale correspondante $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ sera appelée par la suite « la vague linéaire ».

- – 24. En utilisant la condition de surface au repos non encore utilisée, établir la relation de dispersion de l'onde entre ω , g , k et la tangente hyperbolique de kH .
- – 25. Calculer la vitesse de phase v_φ de la vague linéaire.
Déterminer les deux expressions limites de v_φ lorsque la profondeur du réservoir H est petite ou grande devant la longueur d'onde de la vague linéaire. On commentera les expressions obtenues.
- – 26. Déterminer l'expression de la vitesse de groupe v_g de la vague linéaire en profondeur arbitraire.
Montrer la relation $v_g = \frac{v_\varphi}{n} [1 + nkH / \sinh(2kH)]$ où n est un entier que l'on déterminera.
En déduire les valeurs extrêmes du rapport v_g/v_φ .
- Au sein du fluide on considère deux vagues linéaires de même amplitude, mais de nombre d'onde et de pulsation distinctes : $\eta_1(x,t) = A \cos(k_1x - \omega_1t)$ et $\eta_2(x,t) = A \cos(k_2x - \omega_2t)$.
- – 27. Montrer que la vague résultante (surface du fluide) peut se mettre sous la forme $\eta(x,t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(k'x - \omega't)$. On donnera l'expression des 4 paramètres $k < k'$ et $\omega < \omega'$ en fonction de k_1 , k_2 , ω_1 et ω_2 .
Tracer le profil cette vague résultante à un instant fixé t en représentant les longueurs d'ondes $\lambda = 2\pi/k$ et $\lambda' = 2\pi/k'$ sur le même schéma.

II.B De l'influence du fond.

Dans cette partie, nous étudierons de manière simplifiée l'influence du changement de profondeur lorsque les vagues approchent du bord de mer.

Dans le cadre de la théorie linéaire précédente, une vague est caractérisée par un profil de hauteur dépendant du temps t , de sa position latérale $\vec{R} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$, de son vecteur d'onde \vec{k} et de sa pulsation ω .

Le profil est de la forme $\eta(\vec{R},t) = A \cos(\vec{R} \cdot \vec{k} - \omega t)$. Nous supposons que le nombre d'onde et la pulsation sont reliés par la relation de dispersion établie dans la partie précédente.

La zone étudiée présente une variation brutale de profondeur en passant de la profondeur H_1 à la profondeur H_2 lorsque l'abscisse $x = 0$ est franchie. Cette région de transition ainsi que les vecteurs d'ondes respectifs dans les zones 1 et 2, notés \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , sont représentés sur la figure 4 ci-dessous. Dans ce modèle très simplifié on suppose qu'il n'y a pas d'onde réfléchi.

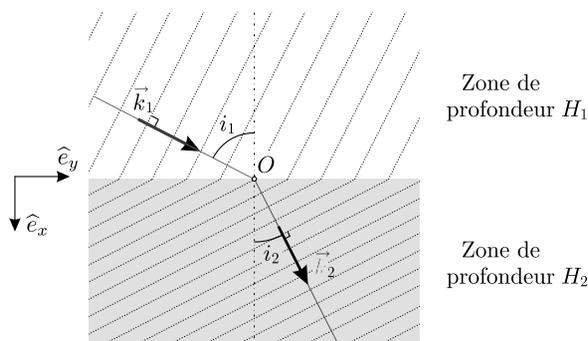


FIGURE 4 – Zone de changement de profondeur.

Nous supposons que les pulsations des vagues sont identiques dans les deux milieux de profondeur différente. En notant $k_{1,2} = \|\vec{k}_{1,2}\|$, on se place dans le régime pour lequel $k_1 H_1 \ll 1$ et

$k_2 H_2 \ll 1$. On note i_1 et i_2 les angles entre les vecteurs d'onde respectifs dans les zones 1 et 2 et la direction x , voir figure 4.

- – 28. Que représentent les lignes pointillées orthogonales aux vecteurs d'ondes sur la figure 4 ? Montrer que la condition de continuité des profils de vague à l'interface impose d'une part des amplitudes identiques dans les deux zones et, d'autre part, une relation entre les angles i_1 et i_2 de la forme $\sin i_1 / \sin i_2 = f(H_1/H_2)$ où l'on précisera la fonction f .
- – 29. En déduire la façon dont varie la direction de propagation des vagues lorsqu'elles approchent du bord de mer, en supposant une variation continue de la profondeur.

Lorsque les vagues approchent du bord de mer, on cherche à déterminer également s'il y a un changement de l'amplitude de la vague, même dans le cadre de la théorie linéaire. Pour cela, on suppose l'absence de toute forme de dissipation dans le système. L'énergie mécanique moyenne du fluide par unité de surface horizontale s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2} \rho g A^2 .$$

Cette énergie est associée aux mouvements dans le fluide en présence d'une vague de surface. Il est possible de montrer que l'énergie moyenne correspondante est transportée par la vitesse de groupe de la vague dont l'intensité est notée v_g .

On considère une vague qui se propage dans la direction (O, \hat{e}_x) . On indique que le flux d'énergie moyen pour une unité de longueur de vague dy , qui se propage dans cette direction est donnée par $dP = E_m v_g dy$. On considère toujours un changement de profondeur en $x = 0$.

- – 30. Déterminer l'expression du rapport des amplitudes de vagues dans les deux zones en fonction du rapport des vitesses de groupe.
Comment varie l'amplitude de la vague à l'approche du rivage ?
Commenter ce résultat en considérant ceux de la question 28.

FIN DE L'ÉPREUVE

Mines Ponts Physique 2 PSI 2023

Corrigé

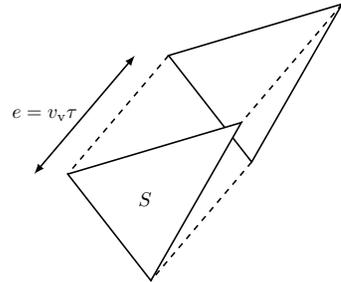
Planche à voile et vagues

I Étude de la planche à voile

I.A Navigation par vent arrière

- Q1** Considérons un volume de surface S et de longueur $e = v_v \tau$. Ce volume contient les N particules d'air qui entrent en collision avec la voile durant la durée τ . La masse volumique de cette masse d'air homogène étant

$$\rho_a = \frac{Nm}{Sv_v\tau} \quad ; \quad N = \frac{\rho_a S v_v \tau}{m}$$



- Q2** Comme les particules cèdent intégralement leur quantité de mouvement, la variation de quantité de mouvement d'une molécule $\Delta \vec{p}_m$ durant la durée τ est

$$\Delta \vec{p}_m = \vec{p}(t + \tau) - \vec{p}(t) = \vec{0} - \vec{p}$$

La conservation de la quantité de mouvement impose que la quantité de mouvement du système {molécule + voile} soit conservée. La variation de la quantité de mouvement de la planche à voile $\Delta \vec{p}_v$ du fait de ce choc est donc

$$\vec{p}_v + \vec{p}_m = \text{cst} \quad ; \quad \Delta \vec{p}_v = -\Delta \vec{p}_m = \vec{p}$$

La force \vec{f} associée à l'impact d'une molécule correspond à la dérivée temporelle de la quantité de mouvement $d\vec{p}_v/dt$. On peut approximer cette dérivée au rapport entre $\Delta \vec{p}_v$ et τ en considérant que ce temps caractéristique est court. Ainsi

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}_v}{dt} \simeq \frac{\Delta \vec{p}_v}{\tau} \quad ; \quad \vec{f} = \frac{m\vec{v}_v}{\tau}$$

- Q3** D'après les réponses précédentes, la force propulsive \vec{F} exercée dans la voile par le vent est donc

$$\vec{F} = N\vec{f} \quad ; \quad \vec{F} = \rho_a S v_v^2 \hat{e}_x$$

Commentaire

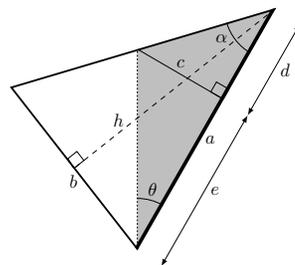
La méthode utilisée ici pour exprimer la force propulsive \vec{F} par le vent est la méthode des collisions reposant sur les transferts de quantité de mouvement à la suite de chocs des particules d'air sur la voile. On peut l'utiliser dans le cas du calcul de la pression. On fait alors l'hypothèse que les chocs sont élastiques, c'est-à-dire que l'énergie cinétique du système {molécule + paroi} est conservée, pour éviter l'accumulation des molécules au niveau de la paroi.

Q4 La voile étant isocèle, sa base b et sa hauteur h , représentées ci-contre, sont

$$b = 2a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad h = a \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Sa surface S est donc

$$S = \frac{bh}{2} = a^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad ; \quad S = \frac{a^2}{2} \sin \alpha.$$



On considère les deux triangles rectangles d'angle α et θ , de même côté opposé c et de côtés adjacents d et e de telle sorte que $a = d + e$, comme représentés ci-dessus.

On constate alors que

$$d = \frac{c}{\tan \alpha} \quad \text{et} \quad e = \frac{c}{\tan \theta}.$$

Il vient donc que

$$a = c \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad ; \quad c = \frac{a}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \theta}}.$$

La surface S' , somme des surfaces de ces deux triangles rectangles est donc

$$S' = \frac{ac}{2} \quad ; \quad S' = \frac{a^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \theta}}.$$

Dans la configuration \mathcal{S} , la force propulsive se répartit symétriquement, ce qui signifie que la surface S' représente la moitié de la surface S , soit

$$S'(\theta_d) = \frac{S}{2} \quad ; \quad \frac{a^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \theta_d}} = \frac{a^2}{4} \sin \alpha$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \theta_d} = \frac{2}{\sin \alpha} \quad ; \quad \frac{1}{\tan \theta_d} = \frac{2}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

donc

$$\tan \theta_d = \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}.$$

A.N.

$$\tan \theta_d = \frac{\sin(60^\circ)}{2 - \cos(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \theta_d = 30^\circ.$$

Q5 Dans le référentiel entraîné avec la planche la vitesse du vent apparent est

$$\vec{v}_{va} = \vec{v}_v - \vec{v}_p.$$

Q6 On étudie la planche à voile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à la force propulsive \vec{F}_{pro} , la force résistante \vec{F}_{res} , son poids \vec{P} , et à la réaction du support \vec{R} . On applique le théorème de la résultante dynamique (TRD) à la planche à voile

$$m_p \vec{a}_p = \vec{F}_{pro} + \vec{F}_{res} + \vec{P} + \vec{R}.$$

En s'intéressant uniquement aux composantes dans le plan horizontal

$$m \frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{2} \rho_a C_v S v_{va}^2 - \frac{1}{2} \rho_e C_p S_p v_p^2 = \frac{1}{2} \rho_a C_v S (v_v - v_p)^2 - \frac{1}{2} \rho_e C_p S_p v_p^2.$$

La vitesse v_p étant uniforme, il vient que

$$0 = (v_v - v_p)^2 - \frac{\rho_e C_p S_p}{\rho_a C_v S} v_p^2$$

$$0 = (1 - \sigma^2) v_p^2 - 2v_v v_p + v_v^2.$$

On reconnaît une équation du second ordre dont les racines sont

$$v_{p\pm} = \frac{v_v}{1 \pm \sigma}.$$

La masse volumique de l'eau ρ_e étant près de mille fois plus importante que celle de l'air ρ_a , la quantité σ est donc telle que

$$\sigma \simeq \sqrt{\frac{1000 C_p S_p}{C_v S}}.$$

Même en considérant une surface de voile S dix fois plus importante que la surface de la planche S_p , il faudrait que le rapport des coefficients C_v/C_p soit de l'ordre de 100 pour que la quantité σ soit inférieure à 1. Sans autre information, la seule supposition raisonnable est que cela n'est pas le cas, et que le rapport des masses volumiques est le facteur qui domine la valeur de σ , soit $\sigma > 1$.

On tire deux conclusions de cette inégalité. D'abord, comme on se place toujours dans le cas d'une planche à voile qui se déplace dans la même direction que le vent, la norme de la vitesse de la planche à voile doit être positive, ainsi

$$v_p = \frac{v_v}{1 + \sigma}.$$

Enfin, comme $\sigma > 0$, cette expression nous permet d'affirmer qu'il n'est pas possible que la planche à voile aille plus vite que le vent.

Commentaire

On peut interpréter les coefficients C_v et C_p comme les coefficients de traînés C_x de la voile et de la planche. On peut les estimer à partir des valeurs obtenues en soufflerie pour des écoulements présentant des nombre de Reynolds supérieurs à 10^4 , comme c'est le cas des écoulements d'air sur la voile et d'eau sur la planche. Pour un plan de normale colinéaire à l'écoulement dans le cas de la voile, et pour un cylindre de base elliptique dans le cas de la planche, on trouve[12] $C_v \simeq C_p \simeq 2$. Les deux coefficients étant du même ordre de grandeur, on peut donc bien exclure la racine négative de $v_p = v_v/(1 - \sigma)$ pour laquelle $0 < \sigma < 1$.

I.B Navigation « au près »

Q7 En utilisant l'expression de la vitesse du vent apparent, il vient que

$$\vec{v}_{va} = \vec{v}_v - \vec{v}_p \quad \text{soit} \quad v_{va} = \sqrt{v_v^2 - 2\vec{v}_v \cdot \vec{v}_p + v_p^2} = \sqrt{v_v^2 + 2v_v v_p \cos \beta_0 + v_p^2}$$

Comme $0 < \beta_0 < \pi/2$, soit $1 > \cos \beta_0 > 0$, on en conclut que

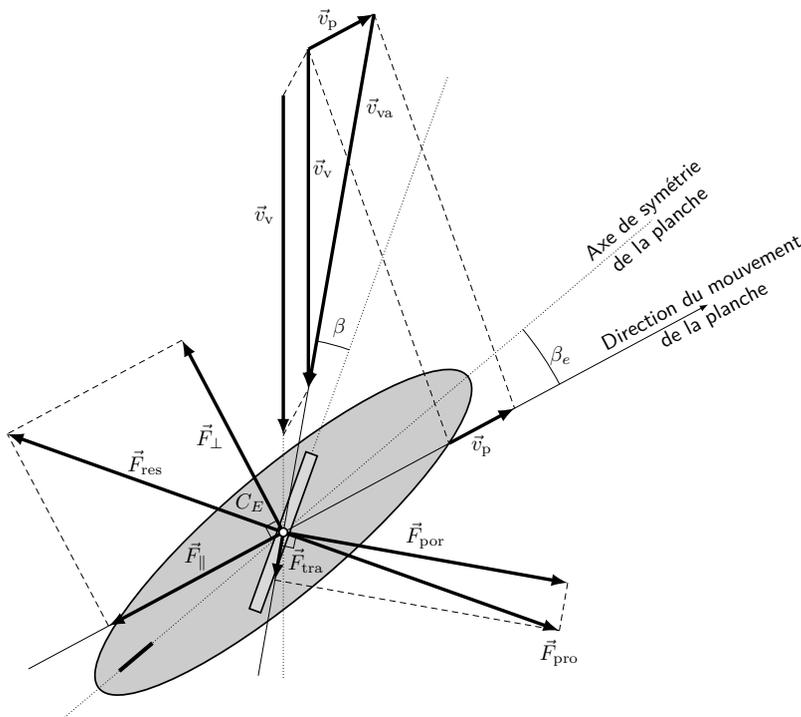
$$v_{va} > v_v.$$

Q8 On se place dans les mêmes conditions que l'étude de la question **Q6**. Comme la vitesse de la planche à voile est constante en module et direction, l'application du TRD dans le plan horizontal donne

$$\vec{0} = \vec{F}_{pro} + \vec{F}_{res}.$$

La force résistive a donc la même intensité que la force propulsive.

À partir de l'expression du vent apparent $\vec{v}_{va} = \vec{v}_v - \vec{v}_p$ et de sa représentation, on peut tracer les vecteurs illustrant la vitesse de la planche à voile \vec{v}_p et la vitesse du vent \vec{v}_v , comme cela a été fait ci-dessous. La force résistive \vec{F}_{res} , égale en norme et opposée à la force propulsive \vec{F}_{pro} a aussi été représentée.



Q9 On a représenté sur la figure de la question **Q8** les composantes \vec{F}_{\parallel} et \vec{F}_{\perp} de la force résistive \vec{F}_{res} . D'après l'énoncé, si $\beta_e = 0$ alors $\vec{F}_{\perp} = \vec{0}$, la force résistive correspond à la composante parallèle à la direction du mouvement de la planche $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{\parallel}$, dans ce cas confondu avec l'axe de symétrie de la planche. La force résistive n'est alors plus opposée à la force propulsive \vec{F}_{pro} . **Donc le déplacement uniforme n'est plus possible si $\beta_e = 0$.**

Q10 Les intensités des forces résistive et propulsive étant égales, il vient que

$$\|\vec{F}_{\text{res}}\| = \|\vec{F}_{\text{prop}}\| ; \frac{1}{2} \rho_e S_p v_p^2 (C_{p,\parallel}(\beta_e) + C_{p,\perp}(\beta_e)) = \frac{1}{2} \rho_a S v_{va}^2 (C_{va,\parallel}(\beta) + C_{va,\perp}(\beta))$$

soit

$$v_{va}^2 = v_p^2 \frac{\rho_e S_p (C_{p,\parallel}(\beta_e) + C_{p,\perp}(\beta_e))}{\rho_a S (C_{va,\parallel}(\beta) + C_{va,\perp}(\beta))}$$

En utilisant de nouveau l'expression de la vitesse du vent apparent $\vec{v}_{va} = \vec{v}_v - \vec{v}_p$, on obtient

$$v_{va}^2 = v_v^2 - 2\vec{v}_v \cdot \vec{v}_p + v_p^2$$

$$v_p^2 \frac{\rho_e S_p (C_{p,\parallel}(\beta_e) + C_{p,\perp}(\beta_e))}{\rho_a S (C_{va,\parallel}(\beta) + C_{va,\perp}(\beta))} = v_v^2 + 2v_v v_p \cos \beta_0 + v_p^2$$

soit

$$v_p^2 + v_v^2 + 2v_p v_v \cos \beta_0 = \sigma_1 v_p^2$$

avec

$$\sigma_1 = \frac{\rho_e S_p (C_{p,\parallel}(\beta_e) + C_{p,\perp}(\beta_e))}{\rho_a S (C_{va,\parallel}(\beta) + C_{va,\perp}(\beta))}$$

Q11 Si on utilise la relation obtenue précédemment, il vient que

$$(1 - \sigma_1) v_p^2 + v_v^2 + 2v_p v_v \cos \beta_0 = 0.$$

Si $0 < \beta_0 < \pi/2$, alors $1 > \cos \beta_0 > 0$. Ainsi, comme $v_p^2 > 0$, $v_v^2 > 0$ et $2v_p v_v > 0$, **l'équation du second ordre ci-dessus n'est vraie que si $1 - \sigma_1 < 0$, donc si $\sigma_1 > 1$.**

Q12 On résout l'équation du second ordre en v_p correspondant à la relation précédente pour obtenir une expression de la norme de la vitesse de la planche v_p . Le discriminant est

$$\Delta = 4v_v^2 \cos^2 \beta_0 \left(1 + \frac{\sigma_1 - 1}{\cos^2 \beta_0} \right).$$

La norme étant positive, la seule solution possible est

$$v_p = v_v \frac{\cos \beta_0 + \sqrt{\cos^2 \beta_0 + \sigma_1 - 1}}{\sigma_1 - 1}.$$

Une vitesse de planche supérieure à celle du vent implique que

$$v_v \frac{\cos \beta_0 + \sqrt{\cos^2 \beta_0 + \sigma_1 - 1}}{\sigma_1 - 1} > v_v$$

$$\sqrt{\cos^2 \beta_0 + \sigma_1 - 1} > \sigma_1 - 1 - \cos \beta_0$$

$$\cos^2 \beta_0 + \sigma_1 - 1 > (\sigma_1 - 1)^2 - 2 \cos \beta_0 (\sigma_1 - 1) + \cos^2 \beta_0$$

$$(2 \cos \beta_0 + 1) (\sigma_1 - 1) > (\sigma_1 - 1)^2.$$

Comme $\sigma_1 - 1 > 0$, il vient finalement que

$$\cos \beta_0 > \frac{\sigma_1 - 2}{2}.$$

Commentaire

Les trois questions précédentes fournissent les résultats auxquelles il faut aboutir. Le jury est donc particulièrement attentif à la démarche employée pour trouver ces réponses. Il sanctionne sévèrement les tentatives malhonnêtes qui consistent à conclure une démonstration erronée par le résultat recherché. Ce type de questions évalue les capacités d'un candidat à décrire son raisonnement, communiquer ses résultats et valider sa démarche.

Q13 À partir de l'expression de la vitesse de la planche obtenue précédemment

$$v_p = v_v \frac{\cos \beta_0 + \sqrt{\cos^2 \beta_0 + \sigma_1 - 1}}{\sigma_1 - 1}$$

on constate que v_p croît avec $\cos \beta_0$, donc décroît avec β_0 pour $0 < \beta_0 < \pi/2$. En supposant une valeur constante pour σ_1 , pour obtenir la vitesse de la planche la plus grande possible **il faut choisir une direction de navigation β_0 la plus faible possible**, soit une valeur tendant vers 0 correspondant à une direction de navigation presque opposée à celle du vent.

Q14 La vitesse de la planche peut aussi s'exprimer telle que

$$v_p = v_v \left(\frac{\cos \beta_0}{\sigma_1 - 1} + \sqrt{\frac{\cos^2 \beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2} + \frac{1}{\sigma_1 - 1}} \right).$$

On constate que v_p est une fonction décroissante de σ_1 . Pour une direction de navigation fixe, pour obtenir la valeur maximale **il faut choisir la valeur de σ_1 la plus faible possible**, soit une valeur tendant vers 1.

II Physique des vagues

II.A Les équations de la vague linéaire

Q15 Effectuons un bilan de matière dans un petit volume $d\tau = dx dy dz$. Au cours d'une durée élémentaire dt , la variation de la masse du système dm correspond à la différence entre la masse présente à l'instant $t + dt$ et celle présente à l'instant t , soit

$$dm = \rho(x, z, t + dt) dx dy dz - \rho(x, z, t) dx dy dz = \frac{\partial \rho(x, z, t)}{\partial t} dx dy dz dt$$

en faisant tendre la durée élémentaire vers 0.

Durant cette durée élémentaire dt , la variation de la masse du système dm correspond aussi à la différence entre la masse entrante en \vec{r} et celle sortante en $\vec{r} + d\vec{r}$. En utilisant le vecteur densité de masse $\vec{j}(\vec{r}, t) = j_x(x, z, t) \hat{e}_x + j_z(x, z, t) \hat{e}_z$ et les vecteurs surfaces $d\vec{S}(\vec{r}) = d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r}) = dy dz \hat{e}_x + dx dy \hat{e}_z$, il vient que

$$\begin{aligned} dm &= \left(\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}(\vec{r}) - \vec{j}(\vec{r} + d\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}(\vec{r} + d\vec{r}) \right) dt \\ &= (j_x(x, z, t) dy dz + j_z(x, z, t) dx dy - j_x(x + dx, z, t) dy dz - j_z(x, z + dz, t) dx dy) dt \\ &= - \left(\frac{\partial j_x(x, z, t)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial j_z(x, z, t)}{\partial z} dx dy dz \right) dt \\ &= - \left(\frac{\partial \rho(x, z, t) u_x(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, z, t) u_z(x, z, t)}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \end{aligned}$$

en faisant tendre dx et dz vers 0. En égalisant les deux expressions précédentes on obtient la loi de conservation de la matière

$$\frac{\partial \rho(x, z, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho(x, z, t) u_x(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, z, t) u_z(x, z, t)}{\partial z} \right) = 0.$$

Q16 Un fluide est considéré incompressible si sa masse volumique est constante et uniforme, $\rho(x, y, t) = \rho$. La relation obtenue précédemment se simplifie

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Commentaire

Un écoulement est incompressible si la dérivée totale de sa masse volumique est nulle $d\rho/dt = 0$. Cette dérivée, aussi appelée dérivée particulaire, exprime la variation de la masse volumique attachée à une particule fluide au cours de son mouvement. Son expression, qui n'est pas à connaître dans le cadre du programme de PSI, est fournie un peu plus loin dans le sujet

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho.$$

La réécriture de l'opérateur $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \rho$ donne

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) - \rho \text{div} \vec{u}.$$

On reconnaît l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \implies \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div} \vec{u} \quad ; \quad \text{div} \vec{u} = 0.$$

Un fluide est, lui, incompressible lorsque sa masse volumique est homogène et uniforme, respectivement constante dans l'espace et dans le temps ($\overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$ et $\partial \rho / \partial t = 0$). En développant l'équation de conservation de la masse, on montre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}} \rho \cdot \vec{u} = 0 \quad ; \quad \text{div} \vec{u} = 0.$$

L'hypothèse d'un fluide incompressible implique forcément que son écoulement est incompressible. La réciproque n'est pas vraie.

Q17 Le potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$ est défini tel que

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{e}_z.$$

On a montré plus tôt que pour un fluide incompressible la divergence du champ de vitesse est nul, ainsi

$$\text{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{donc} \quad \text{div} \vec{u} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

On en conclut que le potentiel de vitesse vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0.$$

Q18 On peut récrire l'équation d'Euler à l'aide du potentiel de vitesse

$$\rho \left[\frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}} \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] = -\rho g \hat{e}_z - \overrightarrow{\text{grad}}(p).$$

La coordonnée de temps et les coordonnées spatiales étant indépendantes, on peut regrouper les termes dans un gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + gz + \frac{p}{\rho} \right] = 0.$$

Le terme dans le gradient correspond donc à une fonction qui ne dépend que du temps, soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t).$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le champ de vitesse \vec{u} est constant au cours du temps, donc le potentiel de vitesse ϕ également. Il en va de même pour la fonction $f(t)$ qui correspond à une constante. Ainsi

$$\frac{1}{2} u^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cst.}$$

On retrouve la **relation de Bernoulli**.

Commentaire

L'équation d'Euler est obtenue en considérant un fluide parfait, soit un fluide de viscosité nul. En considérant en plus que le fluide est homogène, que l'écoulement est incompressible et stationnaire, et que les seules forces volumiques sont celles de pesanteurs, supposées uniformes, on peut faire apparaître la relation de Bernoulli. La constante utilisée dans la relation est caractéristique d'une seule ligne de courant. Pour un écoulement irrotationnel, comme c'est le cas dans le sujet, la constante est la même dans tout le fluide.

Q19 On considère la composante selon l'axe (Oz) du champ de vitesse \vec{u} en $z = 0$. Elle correspond à la dérivée totale par rapport au temps de la hauteur z du fluide

$$u_z(x, z = 0, t) = \left. \frac{dz(x, t)}{dt} \right|_{z=0} = \frac{d\eta(x, t)}{dt} = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\eta(x, t)) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \hat{e}_x$$

d'après la définition de la dérivée totale.

En utilisant l'expression des composantes du champ de vitesse $u_x = \partial\phi/\partial x$ et $u_z = \partial\phi/\partial z$, **au niveau de la surface libre**, on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Q20 À la surface du fluide, la pression est celle de l'atmosphère $p(\eta) = p_0$, ainsi, au niveau de la surface, la relation de Bernoulli devient

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + \left. \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right|_{z=\eta} + g\eta + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

soit

$$\eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} - \left. \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \right|_{z=\eta}.$$

Q21 L'équation de Laplace appliquée à la nouvelle expression du potentiel de vitesse $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ donne

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = Z(z) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X(x, t) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

soit

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

Les deux termes de cette équation dépendent de variables indépendantes, ils sont donc tous les deux égaux à une constante qu'on note μ . Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \mu Z \end{cases}.$$

Q22 Considérons la première condition de surface au repos et les expressions des composantes X et Z fournies

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = X(x, t) \left. \frac{dZ(z)}{dz} \right|_{z=0} = \gamma \sin(kx - \omega t).$$

En intégrant par rapport au temps, il vient que

$$\eta(x, t) = \frac{\gamma}{\omega} \cos(kx - \omega t) + \text{cst.}$$

Par identification avec l'expression du profil de hauteur fourni $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ on en déduit que $\text{cst} = 0$ et $\gamma = A\omega$. **Les expressions données résolvent bien le problème.**

Q23 À partir de l'expression donnée $X(x) = \sin(kx - \omega t)$, on en déduit l'expression de la constante μ

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t) \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X$$

donc $\mu = k^2$. On peut alors obtenir une expression général de $Z(z)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 Z \quad ; \quad Z(z) = B \sinh(kz) + C \cosh(kz)$$

avec B et C , deux constantes d'intégration à définir à partir des deux conditions initiales

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = X(x, t) \left. \frac{dZ(z)}{dz} \right|_{z=-H} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dZ(z)}{dz} \right|_{z=0} = \gamma = A\omega.$$

Ainsi

$$\left. \frac{dZ(z)}{dz} \right|_{z=-H} = k(B \cosh(kH) - C \sinh(kH)) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dZ(z)}{dz} \right|_{z=0} = kB = A\omega$$

soit

$$C = B \frac{\cosh(kH)}{\sinh(kH)} \quad \text{et} \quad B = \frac{A\omega}{k}.$$

Il vient donc que

$$Z(z) = \frac{A\omega \sinh(kz) \sinh(kH) + \cosh(kz) \cosh(kH)}{k \sinh(kH)} ; \quad Z(z) = \frac{A\omega \cosh[k(z+H)]}{k \sinh(kH)}.$$

On identifie ainsi la constante

$$\zeta = \frac{A\omega}{k}.$$

Commentaire

À partir des définitions des fonctions \cosh et \sinh on peut retrouver la relation trigonométrique exploitée précédemment

$$\begin{aligned} \sinh(kz) \sinh(kH) + \cosh(kz) \cosh(kH) &= \frac{1}{4} [(e^{kz} - e^{-kz})(e^{kH} - e^{-kH}) + (e^{kz} + e^{-kz})(e^{kH} + e^{-kH})] \\ &= \frac{2(e^{k(z+H)} + e^{-k(z+H)})}{4} = \cosh[k(z+H)]. \end{aligned}$$

Commentaire

Si on reprend l'équation différentielle du second d'ordre précédente $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 Z$, une solution générale évidente est

$$Z = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}.$$

On peut développer cette expression afin de faire apparaître les fonctions \cosh et \sinh

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2}\right) e^{kz} + \left(\frac{C_1}{2} - \frac{C_1}{2}\right) e^{-kz} + \left(\frac{C_2}{2} + \frac{C_2}{2}\right) e^{-kz} + \left(\frac{C_2}{2} - \frac{C_2}{2}\right) e^{kz} \\ &= \frac{C_1}{2} (e^{kz} + e^{-kz}) + \frac{C_2}{2} (e^{kz} + e^{-kz}) + \frac{C_1}{2} (e^{kz} - e^{-kz}) - \frac{C_2}{2} (e^{kz} - e^{-kz}) \\ &= (C_1 + C_2) \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2} + (C_1 - C_2) \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2} \\ &= (C_1 + C_2) \cosh(kz) + (C_1 - C_2) \sinh(kz). \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'expression obtenue précédemment en identifiant les constantes $B = (C_1 + C_2)/2$ et $C = (C_1 - C_2)/2$.

Q24 En utilisant la deuxième condition de surface au repos ainsi que les expressions de $X(x, t)$ et $Z(z)$ obtenues plus tôt

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{g} Z(z=0) \frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = \frac{A\omega^2 \cosh(kH)}{kg \sinh(kH)} \cos(kx - \omega t).$$

En comparant avec l'expression du profil de hauteur fourni $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ on en déduit la relation de dispersion de l'onde

$$\omega^2 = kg \tanh(kH).$$

Q25 D'après la définition de la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$, il vient que

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{g \tanh(kH)}{k}}.$$

Afin de déterminer les expressions limites de v_φ lorsque la profondeur du réservoir H est petite ou grande devant la longueur d'onde de la vague linéaire $\lambda = 2\pi/k$, on utilise cette expression de la tangente hyperbolique

$$\tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi H}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi H}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi H}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi H}{\lambda}}}.$$

En utilisant le développement limité au premier ordre de la fonction exponentielle il vient que

$$\text{Pour } H \ll \lambda \quad \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) \simeq \frac{1 + \frac{2\pi H}{\lambda} - \left(1 - \frac{2\pi H}{\lambda}\right)}{1 + \frac{2\pi H}{\lambda} + \left(1 - \frac{2\pi H}{\lambda}\right)} = \frac{2\pi H}{\lambda} = kH.$$

$$\text{Et pour } H \gg \lambda \quad \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) \simeq \frac{e^{\frac{2\pi H}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi H}{\lambda}}} = 1.$$

Ainsi

$$\text{Pour } H \ll \lambda \quad v_\varphi \simeq \sqrt{gH} \quad \text{et pour } H \gg \lambda \quad v_\varphi \simeq \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

On constate que **pour un réservoir de faible profondeur**, la vitesse de phase correspond à une constante qui dépend de la profondeur du réservoir, **il n'y a donc pas de phénomène de dispersion**. **Dans le cas d'un réservoir de grande profondeur**, la relation de dispersion est telle que $\omega^2 \simeq kg$ et la vitesse de phase peut se mettre sous la forme $v_\varphi \simeq \frac{g}{\omega}$. Dans ce cas, la vitesse de phase dépend de la pulsation de la vague linéaire, **il y a dispersion**.

Q26 D'après la définition de la vitesse de groupe $v_g = \partial\omega/\partial k$, il vient que

$$v_g = \frac{\partial}{\partial k} \left(\sqrt{kg \tanh(kH)} \right) = \frac{g \tanh(kH) + \frac{kH}{\cosh^2(kH)}}{\sqrt{kg \tanh(kH)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \tanh(kH)}{k}} \left[1 + \frac{kH}{\sinh(kH) \cosh(kH)} \right]$$

soit

$$v_g = \frac{v_\varphi}{2} \left[1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right].$$

On peut ainsi déterminer l'entier $n = 2$.

Comme précédemment, on utilise l'expression du sinus hyperbolique impliquant les fonctions exponentielles

$$\sinh\left(\frac{4\pi H}{\lambda}\right) = \frac{e^{\frac{4\pi H}{\lambda}} - e^{-\frac{4\pi H}{\lambda}}}{2}.$$

En utilisant le développement limité au premier ordre de la fonction exponentielle il vient que

Pour $H \ll \lambda$ $\sinh\left(\frac{4\pi H}{\lambda}\right) \simeq \frac{1 + \frac{2\pi H}{\lambda} - \left(1 - \frac{2\pi H}{\lambda}\right)}{2} = \frac{4\pi H}{\lambda} = 2kH.$

Et pour $H \gg \lambda$ $\sinh\left(\frac{4\pi H}{\lambda}\right) \simeq \frac{e^{\frac{4\pi H}{\lambda}}}{2} \rightarrow +\infty.$

Ainsi

$$\text{Pour } H \ll \lambda \quad \frac{v_g}{v_\varphi} \simeq \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kH}{2kH} \right] = 1 \quad \text{et pour } H \gg \lambda \quad \frac{v_g}{v_\varphi} \simeq \frac{1}{2}.$$

Q27 La vague résultante correspond à la somme des deux vagues linéaires

$$\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \eta_2(x, t) = A [\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)].$$

On reconnaît l'identité trigonométrique $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ avec

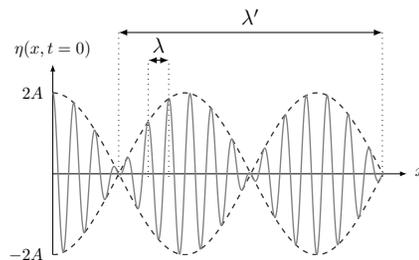
$$\begin{cases} a + b = k_1x - \omega_1t \\ a - b = k_2x - \omega_2t \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \\ b = \frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \end{cases}.$$

Il vient donc que

$$\eta(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(k'x - \omega't)$$

avec $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$; $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$; $k' = \frac{k_1 - k_2}{2}$ et $\omega' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$.

On peut représenter le profil de la vague résultante à un instant t fixé, par exemple $t = 0$ comme illustré ci-contre. On constate un phénomène de battements : une onde de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ est modulée en amplitude par une longueur d'onde plus importante $\lambda' = 2\pi/k'$.



Commentaire

Le phénomène de battements apparaît lorsque deux ondes de fréquences proches se superposent. Elles produisent une onde quasi-sinusoidale dont l'amplitude est modulée par leur différence de fréquence. Dans le cas des ondes sonores, on peut se servir de ce phénomène pour accorder un instrument de musique à l'aide d'une référence de fréquence, fournie par exemple par un diapason. Les battements, c'est-à-dire les modulations en amplitude, sont audibles. En se rapprochant de l'accord, leur fréquence diminue jusqu'à ce que les battements disparaissent en atteignant l'accord.

II.B De l'influence du fond

Q28 Les lignes en pointillés représentent les surfaces d'onde : les surfaces de même valeur de phase.

À l'interface, soit en $x = 0$, la condition de continuité implique égalité des deux profils, soit

$$\begin{aligned}\eta_1(x = 0, y, t) &= \eta_2(x = 0, y, t) \\ A_1 \cos(yk_{1,y} - \omega t) &= A_2 \cos(yk_{2,y} - \omega t)\end{aligned}$$

soit

$$A_1 = A_2 \quad \text{et} \quad k_{1,y} = k_{2,y}.$$

Il y a donc égalité des amplitudes dans les deux zones et des composantes selon (Oy) des vecteurs d'onde. Cette dernière égalité peut se mettre sous la forme suivante

$$\|\vec{k}_1\| \sin i_1 = \|\vec{k}_2\| \sin i_2.$$

En utilisant la relation de dispersion pour les faibles profondeurs $\omega^2 = kg \tanh(kH) \simeq k^2 gH$, on peut alors identifier la fonction f

$$\frac{\omega}{\sqrt{gH_1}} \sin i_1 = \frac{\omega}{\sqrt{gH_2}} \sin i_2 \quad ; \quad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} = f\left(\frac{H_1}{H_2}\right).$$

Commentaire

On peut noter que le travail précédent nous permet de retrouver la loi de la réfraction de Snell-Descartes dans le cas d'une onde lumineuse

$$\|\vec{k}_1\| \sin i_1 = \|\vec{k}_2\| \sin i_2 \quad ; \quad \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin i_1 = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \sin i_2 \quad ; \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Q29 D'après la relation précédente, si la profondeur H_2 diminue alors l'angle i_2 décroît également. C'est pourquoi **la direction des vagues devient perpendiculaire au bord de mer lorsqu'elles s'en approchent.**

Q30 Si on considère qu'il y a conservation du flux d'énergie moyen pour une unité de longueur dy , on peut écrire

$$E_{m,1} v_{g,1} = E_{m,1} v_{g,1} \quad ; \quad A_1^2 v_{g,1} = A_2^2 v_{g,2}.$$

Comme on se place toujours dans le cas des faibles profondeurs, on peut approximer la valeur de la vitesse de groupe de telle manière que $v_g \simeq v_\varphi \simeq \sqrt{gH}$. Il vient que

$$A_1^2 \sqrt{gH_1} = A_2^2 \sqrt{gH_2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Cette relation concorde bien avec les observations qu'on peut faire sur un rivage : en s'approchant de ce dernier, **la profondeur diminue et l'amplitude des vagues augmente fortement.**

Ce résultat est en contradiction avec celui trouvé question Q28 : des amplitudes identiques pour des zones de profondeurs différentes.

ⓑ Commentaire

La théorie linéaire des vagues exploitée dans le sujet correspond au modèle de la houle d'Airy. Ce modèle considère un fluide parfait et incompressible, un écoulement irrotationnel, une profondeur de fluide constante et une amplitude d'onde faible. Dans le cas, de vagues approchant du bord, ces deux dernières hypothèses ne sont plus valables.

