

L1

SCIENCES

Mathématiques

Le cours en fiches

2^e édition

- **117** fiches-méthodes
- **365** exercices corrigés
- Formulaire

Abdelaziz **El Kaabouchi**



Chapitre 1

Polynômes et fractions rationnelles

- 1.1 Comment effectuer une division euclidienne de polynômes ?
- 1.2 Comment montrer qu'un nombre est racine d'un polynôme ?
- 1.3 Comment montrer qu'un polynôme est divisible par un autre polynôme en utilisant la division euclidienne ?
- 1.4 Comment montrer qu'un polynôme est divisible par un autre polynôme en utilisant les racines ?
- 1.5 Comment montrer l'égalité de deux polynômes ?
- 1.6 Comment factoriser un polynôme ?
- 1.7 Comment déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle ?
- 1.8 Comment faire une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle paire (resp. impaire) ?
- 1.9 Comment déterminer le coefficient relatif à un pôle simple ?
- 1.10 Comment effectuer une division suivant les puissances croissantes de polynômes ?
- 1.11 Comment déterminer les coefficients relatifs à un pôle multiple ?
- 1.12 Comment faire une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle ?

1.1 Comment effectuer une division euclidienne de polynômes ?

Pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme non nul B , on ordonne d'abord les polynômes A et B suivant les puissances décroissantes,

$$A = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0, \quad \text{avec } \alpha_n \neq 0$$

$$B = \beta_p X^p + \beta_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \beta_0, \quad \text{avec } \beta_p \neq 0$$

puis on place A au dividende, en utilisant des vides pour les degrés manquants, et on place B au diviseur.

- Le premier terme du quotient est $\frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p}$.
- On écrit le polynôme $\frac{\alpha_n}{\beta_p} X^{n-p} B$ en dessous du polynôme A , et on le soustrait de A ; on obtient ainsi A_1 .
- On répète ces opérations jusqu'à l'obtention d'un polynôme de degré strictement inférieur au degré de B ; ce polynôme est le *reste* R , tandis que Q est écrit à l'emplacement traditionnel du quotient.

EXEMPLE

Effectuer la division suivant les puissances décroissantes (division euclidienne) de : $X^4 + 1$ par $X^2 + X + 1$.

Voici la division euclidienne de $X^4 + 1$ par $X^2 + X + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 X^4 \\
 -(X^4 + X^3 + X^2) \\
 \hline
 -X^3 - X^2 \\
 +1 \\
 -(-X^3 - X^2 - X) \\
 \hline
 X + 1
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 +1 \\
 \\
 \\
 +1 \\
 \\
 +1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 X^2 + X + 1 \\
 X^2 - X
 \end{array}
 \right.$$

Le quotient est $Q = X^2 - X$ et le reste est $R = X + 1$.

Exercices

Effectuer la division suivant les puissances décroissantes (division euclidienne) de :

1. $A = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $B = X^2 + X - 1$;
2. $A = X^5 + X + 1$ par $B = X^3 - X^2 + 1$.

1.2 Comment montrer qu'un nombre est racine d'un polynôme ?

Pour montrer que a est racine d'un polynôme P , on montre que $\tilde{P}(a) = 0$.

Pour montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme P , on montre que

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0$$

E X E M P L E

1. **Montrer que 2 est une racine du polynôme $P = X^2 - 5X + 6$.**

En effet : $\tilde{P}(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.

2. **Soit $P = X^6 + 3X^5 - 2X^4 - 16X^3 - 21X^2 - 11X - 2$. Montrer que (-1) est une racine du polynôme P , et trouver son ordre de multiplicité.**

On a $\tilde{P}(-1) = 1 - 3 - 2 + 16 - 21 + 11 - 2 = 0$; donc -1 est une racine de P . Calculons P' , P'' et $P^{(3)}$.

$$P' = 6X^5 + 15X^4 - 8X^3 - 48X^2 - 42X - 11,$$

$$P'' = 30X^4 + 60X^3 - 24X^2 - 96X - 42,$$

$$P^{(3)} = 120X^3 + 180X^2 - 48X - 96$$

d'où $\tilde{P}'(-1) = -6 + 15 + 8 - 48 + 42 - 11 = 0$,

$\tilde{P}''(-1) = 30 - 60 - 24 + 96 - 42 = 0$ et $\tilde{P}^{(3)}(-1) = -120 + 180 + 48 - 96 \neq 0$;

donc -1 est une racine de P d'ordre 3.

Exercices

1. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine -1 dans les polynômes suivants :

(a) $P = X^7 + 3X^6 + 3X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$.

(b) $Q = X^5 + 7X^4 + 19X^3 + 25X^2 + 16X + 4$?

2. Trouver les racines du polynôme $X^5 - 1$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a , b et c pour que le polynôme $X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ ait une racine d'ordre 4.

Quelle est alors cette racine ?

Quelles sont les autres racines ?

1.3 Comment montrer qu'un polynôme est divisible par un autre polynôme en utilisant la division euclidienne ?

Pour montrer qu'un polynôme A est divisible par un polynôme B , on montre que le reste de la division euclidienne de A par B est *nul*.

E X E M P L E

Montrer que le polynôme

$$P = X^6 + 3X^5 - 2X^4 - 16X^3 - 21X^2 - 11X - 2$$

est divisible par $X^2 - 2X - 1$.

En effectuant la division euclidienne de P par $X^2 - 2X - 1$, on trouve un reste nul, d'où P est divisible par $X^2 - 2X - 1$.

Exercices

1. Montrer que le polynôme

$$P = X^7 - X^6 - 3X^5 + 6X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 5X + 1$$

est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 2X - 1$.

2. Montrer que le polynôme $P = X^4 - 5X^2 + 6$ est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 2$.
3. Montrer que le polynôme $P = 5X^4 - 13X^3 + 11X^2 + 17X - 12$ est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 3X + 4$.
4. Montrer que le polynôme

$$P = X^9 + X^8 + X^6 + X^5 + 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$$

est divisible par le polynôme $Q = X^4 - X + 1$.

5. Montrer que le polynôme

$$P = -3X^7 + 5X^5 - 2X^4 - X^3 + X^2 + 1$$

est divisible par le polynôme $Q = X^3 - X + 1$.

6. Montrer que le polynôme

$$P = -2X^8 + X^7 + 4X^6 + X^5 - 6X^4 - X^3 - X^2 + 9X - 3$$

est divisible par le polynôme $Q = 2X^3 - X^2 - 3$.

1.4 Comment montrer qu'un polynôme est divisible par un autre polynôme en utilisant les racines ?

Pour montrer qu'un polynôme A est divisible par un polynôme B , on montre que *toutes* les racines *complexes* de B sont des racines de A avec au moins le même ordre de multiplicité.

E X E M P L E

Montrer que le polynôme $P = (X - 3)^{20} + (X - 2)^{10} - 1$ est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 5X + 6$.

Comme 2 et 3 sont les racines de Q et que $\tilde{P}(3) = \tilde{P}(2) = 0$, donc P est divisible par Q .

Exercices

1. Soit le polynôme

$$P = 3X^6 - X^5 - X^4 - 4X^3 + X^2 + X + 1.$$

- (a) Montrer que P est divisible par $X^2 + X + 1$;
- (b) Montrer que 1 est racine double de P ;
- (c) Résoudre l'équation $\tilde{P}(x) = 0$.

2. Soit le polynôme

$$P = X^7 - 7X^6 + 20X^5 - 32X^4 + 35X^3 - 29X^2 + 16X - 4.$$

- (a) Montrer que P est divisible par $X^2 + 1$;
- (b) Montrer que 1 est racine triple de P ;
- (c) Résoudre l'équation $\tilde{P}(x) = 0$.

3. Montrer que dans $\mathbb{Z}[X]$, le polynôme $P = (X - 2)^{2n} + (X - 1)^n - 1$ est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 3X + 2$.

Quel est le quotient ?

4. Montrer que dans $\mathbb{Z}[X]$, le polynôme $P = X^3 - X^2 - 14X + 24$ est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 5X + 6$.

Quel est le quotient ?

1.5 Comment montrer l'égalité de deux polynômes ?

Pour montrer que deux polynômes P et Q sont égaux, on montre que $\tilde{P}(r) = \tilde{Q}(r)$ pour une infinité de nombres (si on ne connaît pas leur degré) ou simplement pour $n + 1$ nombres, si leur degré est inférieur ou égal à n .

E X E M P L E

Soient les polynômes

$$P = (X - 1)[(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^{2^2})] \text{ et } Q = (X^8 - 1).$$

Montrer que $P = Q$.

Comme $\deg(P) = \deg(Q) = 8$; il suffit donc de vérifier que $\tilde{P}(r) = \tilde{Q}(r)$ pour 9 valeurs. On vérifie facilement que $\tilde{P}(0) = \tilde{Q}(0)$, $\tilde{P}(1) = \tilde{Q}(1)$, $\tilde{P}(2) = \tilde{Q}(2)$, $\tilde{P}(3) = \tilde{Q}(3)$, $\tilde{P}(i) = \tilde{Q}(i)$,

Par ailleurs, P et Q sont pairs, d'où :

$$\tilde{P}(-1) = \tilde{Q}(-1), \tilde{P}(-i) = \tilde{Q}(-i), \tilde{P}(-2) = \tilde{Q}(-2), \tilde{P}(-3) = \tilde{Q}(-3),$$

et par suite $P = Q$.

Exercices

1. Montrer que les polynômes suivants sont égaux :

$$P = (X + 1)^2(X - 1)^3(X + 2)$$

et

$$Q = X^6 + X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 5X^2 + X - 2.$$

2. Montrer que les polynômes suivants sont égaux :

$$P = (X + 1)^2(X + 2)^3$$

et

$$Q = X^5 + 8X^4 + 25X^3 + 38X^2 + 28X + 8.$$

3. Montrer que les polynômes suivants sont égaux :

$$P = (X - 1)(X - 2)(X - 3) \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

4. Montrer que les polynômes suivants sont égaux :

$$P = (X^2 + 1)(X - 2)(X^2 - 1)$$

et

$$Q = X^5 - 2X^4 - X + 2.$$

1.6 Comment factoriser un polynôme ?

Pour factoriser un polynôme P de degré au moins 3, on vérifie si $-2, -1, 0, 1$ ou 2 est racine de P . Si tel n'est pas le cas, on regarde s'il a une forme particulière (paire, impaire, bicarré. . .).

E X E M P L E

1. **Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^3 - X^2 - 14X + 24$.**

On pose $P = X^3 - X^2 - 14X + 24$; on remarque que $\tilde{P}(2) = 0$, en effectuant la division euclidienne de P par $(X - 2)$, on obtient

$$P = (X - 2)(X^2 + X - 12).$$

On cherche ensuite les racines de $(X^2 + X - 12)$; on trouve alors

$$(X^2 + X - 12) = (X - 3)(X + 4)$$

et par suite $P = (X - 2)(X - 3)(X + 4)$.

2. **Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 5X^2 + 6$.**

On pose $Y = X^2$; on a l'égalité $X^4 - 5X^2 + 6 = Y^2 - 5Y + 6$.

Or, $Y^2 - 5Y + 6 = (Y - 2)(Y - 3)$, d'où

$$X^4 - 5X^2 + 6 = (X^2 - 2)(X^2 - 3) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}).$$

3. **Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme**

$$P = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 1.$$

Dans P les coefficients équidistants des extrêmes sont égaux (polynôme réciproque). On groupe ces termes, d'où

$$P = X^2 \left[X^2 + \frac{1}{X^2} + 4 \left(X + \frac{1}{X} \right) + 8 \right]$$

En posant $Y = X + \frac{1}{X}$, on a $P = X^2(Y^2 + 4Y + 6)$.

On calcule ensuite les racines du polynôme en Y , d'où les racines de P .

En regroupant enfin les racines conjuguées, on obtient :

$$P = [X^2 + (2 + \sqrt{2})X + 3 + 2\sqrt{2}] \cdot [X^2 + (2 - \sqrt{2})X + 3 - 2\sqrt{2}].$$

Exercices

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants

$$P_1 = X^3 + 2X^2 + 2X + 1 ; \quad P_2 = X^4 + 2X^2 - 3 ; \quad P_3 = X^4 + X^2 + 1.$$

1.7 Comment déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle ?

Pour trouver la partie entière d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$, on calcule le quotient dans la division euclidienne de P par Q .

En particulier, si $\deg(P) < \deg(Q)$ cette partie entière vaut 0.

E X E M P L E

Trouver la partie entière de la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^5 - 2X^4 + 3X - 5}{X^2 - 5X + 6}.$$

On effectue la division euclidienne de $P = X^5 - 2X^4 + 3X - 5$

par $Q = X^2 - 5X + 6$, on obtient $P = (X^3 + 3X^2 + 9X + 27)Q + 84X - 167$,

donc la partie entière de F est $X^3 + 3X^2 + 9X + 27$,

d'où $F = (X^3 + 3X^2 + 9X + 27) + \frac{84X - 167}{X^2 - 5X + 6}$.

Exercices

Trouver la partie entière de chacune des fractions rationnelles suivantes :

1. $F = \frac{X^7}{X+1}$;

2. $G = \frac{X^5 + 2X + 1}{X^3 + 3X^2 + X + 2}$;

3. $H = \frac{X^4 + 1}{X^2 + 3X - 3}$;

4. $I = \frac{X^5 + 3}{5X^2 - X + 2}$;

5. $J = \frac{X^6 - X^3 + 1}{2X^5 - 3X^2 + 2}$;

6. $K = \frac{X^7 - 2X^5 + 6}{X^3 + X^2 + 1}$.

1.8 Comment faire une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle paire (resp. impaire) ?

- Quand la fraction est *paire*, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ est *l'opposé* du coefficient de $\frac{1}{X+a}$.

- Quand la fraction est *impaire*, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ est *égal* du coefficient de $\frac{1}{X+a}$.

E X E M P L E

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$F = \frac{1}{X^2 - 1} ; \quad G = \frac{X}{X^2 - 1}$$

Comme F est paire, donc $F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{-\alpha}{X+1}$: dans ce cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

Comme G est impaire, donc $G = \frac{\beta}{X-1} + \frac{\beta}{X+1}$: dans ce cas $\beta = \frac{1}{2}$.

Exercices

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $F = \frac{X}{X^2 - 4} ;$

2. $G = \frac{X^2}{X^4 - 16} ;$

3. $H = \frac{1}{X^3 - X} ;$

4. $I = \frac{X^2 + 1}{X^5 - X^3} ;$

5. $J = \frac{X^3 + X}{X^4 - X^2}.$

1.9 Comment déterminer le coefficient relatif à un pôle simple ?

Soit a un pôle simple de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ et soit α le coefficient de $\frac{1}{X-a}$.

$$\text{On a : } F = \frac{P}{(X-a)Q_1} \text{ et } \alpha = \frac{\tilde{P}(a)}{\tilde{Q}_1(a)} \text{ ou } \alpha = \frac{\tilde{P}(a)}{\tilde{Q}'(a)}.$$

E X E M P L E

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante

$$F = \frac{2X+1}{(X-1)(X+4)}.$$

La partie entière est nulle.

$$\text{Ici } P = 2X+1, \quad Q = (X-1)(X+4)$$

Les deux pôles 1 et (-4) sont simples, donc la décomposition s'écrit à priori sous la forme :

$$F = \frac{\alpha}{(X-1)} + \frac{\beta}{(X+4)}, a=1, Q_1 = (X+4).$$

$$\text{Par ailleurs, les formules précédentes donnent : } \alpha = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 4} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{On fait la même chose pour } b = -4, \text{ on trouve } \beta = \frac{2 \cdot (-4) + 1}{(-4) - 1} = \frac{7}{5}.$$

Exercices

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{2X-1}{(X-1)(X-2)} ;$

2. $\frac{X^2+1}{(X-1)(X^2-4)} ;$

3. $\frac{X^2+X-3}{X^2-3X+2} ;$

4. $\frac{X^4}{X^2-X-6}.$

1.10 Comment effectuer une division suivant les puissances croissantes de polynômes ?

Pour effectuer la division suivant les puissances croissantes du polynôme A par le polynôme B , on ordonne d'abord ces polynômes suivant les puissances croissantes :

$$A = \alpha_p X^p + \alpha_{p+1} X^{p+1} + \cdots + \alpha_q X^q, \quad \text{avec } \alpha_p \neq 0$$

$$B = \beta_0 + \cdots + \beta_{n-1} X^{n-1} + \beta_n X^n, \quad \text{avec } \beta_0 \neq 0$$

puis, on place A au dividende, en utilisant des vides pour les degrés manquants, et on place B au diviseur.

- Le premier terme du quotient est $\frac{\alpha_p}{\beta_0} X^p$.
- On écrit le polynôme $\frac{\alpha_p}{\beta_0} X^p B$ en dessous du polynôme A , et on le soustrait de A ; on obtient ainsi A_1 .
- On répète ces opérations jusqu'à l'obtention dans le dividende d'un polynôme de la forme $X^{n+1} R$.

E X E M P L E

Calculer le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de $1 + X$ par $1 + X + X^2$.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 1 + X \\
 \underline{1 + X + X^2} \\
 -X^2 \\
 -X^2 - X^3 - X^4 \\
 \underline{ X^3 + X^4} \\
 X^3 + X^4 + X^5 \\
 \underline{ -X^5}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 1 + X + X^2 \\
 1 - X^2 + X^3
 \end{array}
 \end{array}$$

Le quotient est : $Q = 1 - X^2 + X^3$ et le reste est $R = -1$.

Exercices

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de :

1. $A = 3 + X - 2X^2$ par $B = 3 + X$ à l'ordre 4 ;
2. $A = 2 + X - X^2$ par $B = 1 + 3X - X^2 - X^4$ à l'ordre 5.

1.11 Comment déterminer les coefficients relatifs à un pôle multiple ?

Si $F = \frac{P}{(X-a)^p Q_1}$ avec $\tilde{Q}_1(a) \neq 0$. On pose $Y = X - a$ et on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre $(p-1)$ de $P(a+Y)$ par $Q_1(a+Y)$.

E X E M P L E

Décomposer en éléments simples la fraction : $F = \frac{X+3}{(X-1)^3(X+2)}$.

La partie entière est nulle. Les pôles sont $a = 1$ d'ordre 3 et $b = -2$ d'ordre 1. La fraction se décompose sous la forme :

$$F = \frac{\alpha_3}{(X-1)^3} + \frac{\alpha_2}{(X-1)^2} + \frac{\alpha_1}{(X-1)} + \frac{\beta}{(X+2)}.$$

Calculons $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

Ici $P = X + 3$, $Q_1 = (X + 2)$, $Y = X - 1$, on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre $(3-1) = 2$ de $P(a+Y) = (1+Y) + 3 = 4+Y$ par $Q_1(a+Y) = ((1+Y) + 2) = 3+Y$.

$$\begin{array}{r|l} 4+Y & 3+Y \\ 4+\frac{4}{3}Y & \frac{4}{3}-\frac{1}{9}Y+\frac{1}{27}Y^2 \\ -\frac{1}{3}Y & \\ -\frac{1}{3}Y-\frac{1}{9}Y^2 & \\ \hline & \frac{1}{9}Y^2 \\ & \frac{1}{9}Y^2+\frac{1}{27}Y^3 \\ & -\frac{1}{27}Y^3 \end{array}$$

D'où $\alpha_3 = \frac{4}{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{9}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{27}.$

Pour calculer β , on utilise la méthode 9, on obtient $\beta = \frac{-2+3}{(-2-1)^3} = -\frac{1}{27}.$

Exercices

Se reporter page : 143.

1.12 Comment faire une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle ?

Dans cette fiche, on traite un exemple qui rassemble les principales difficultés de la décomposition en éléments simples.

E X E M P L E

Décomposer en éléments simples : $F = \frac{X^9 - 4X^5 + 1}{X(X^2 + 1)(X + 1)^2(X - 1)^3}$.

La fraction F est irréductible (aucun zéro du dénominateur n'est zéro du numérateur). Les pôles de F sont : 0 , i , $-i$: pôles simples ; -1 : pôle double et 1 : pôle triple. Le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur, la partie entière E n'est pas nulle. Nous la calculons en divisant le numérateur par le dénominateur suivant les puissances décroissantes (division euclidienne). On obtient :

$$X^9 - 4X^5 + 1 = (X + 1) [X(X^2 + 1)(X + 1)^2(X - 1)^3] + 2X^7 - 4X^5 - 2X^3 + X + 1$$

La partie entière est donc $E = X + 1$. La fraction F s'écrit sous la forme :

$$F = X + 1 + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\alpha_k}{(X - 1)^k} + \frac{\beta}{(X - i)} + \frac{\lambda}{(X + i)} + \frac{\delta}{X} + \frac{\gamma_2}{(X + 1)^2} + \frac{\gamma_1}{(X + 1)}$$

Considérons le pôle 1 et posons $Y = X - 1$. Les coefficients $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ ne dépendent en fait que des termes en Y de degré inférieur à 2 (la division se faisant à l'ordre 2). Il suffit donc de diviser $-2 - 11Y - 4Y^2$ par $8 + 24Y + 30Y^2$ à l'ordre 2 . On trouve $\alpha_3 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_2 = -\frac{5}{8}$, $\alpha_1 = \frac{37}{16}$. Multiplions les deux membres par X et substituons la valeur 0 on obtient $\delta = -1$; multiplions les deux membres par $X - i$ et substituons la valeur i on obtient $\beta = \frac{2 - i}{8}$; multiplions les deux membres par $X + i$ et substituons la valeur $-i$ on obtient $\lambda = \frac{2 + i}{8}$; multiplions enfin les deux membres par $(X + 1)^2$ et substituons la valeur -1 on obtient $\gamma_2 = \frac{1}{4}$. Pour obtenir le dernier coefficient, on calcule la limite quand $x \mapsto \infty$ de $x(F - E)(x)$, on trouve $2 = \alpha_1 + \beta + \lambda + \delta + \gamma_1$, d'où $\gamma_1 = \frac{3}{16}$. Ainsi F s'écrit sous la forme

$$F = X + 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{(X - 1)^3} + \frac{-\frac{5}{8}}{(X - 1)^2} + \frac{\frac{37}{16}}{(X - 1)} + \frac{\frac{2 - i}{8}}{(X - i)} + \frac{\frac{2 + i}{8}}{(X + i)} + \frac{-1}{X} + \frac{\frac{1}{4}}{(X + 1)^2} + \frac{\frac{3}{16}}{(X + 1)}.$$

Exercices

Se reporter page : 143.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

- 2.1 Comment montrer qu'une partie est stable par combinaison linéaire ?
- 2.2 Comment montrer qu'une partie est engendrée par une famille de vecteurs ?
- 2.3 Comment montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel en utilisant la définition ?
- 2.4 Comment montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel en utilisant l'intersection ?
- 2.5 Comment montrer qu'une partie est la somme de deux sous-espaces vectoriels ?
- 2.6 Comment montrer qu'une partie est un espace vectoriel ?
- 2.7 Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ?
- 2.8 Comment montrer qu'une famille est génératrice ou un système générateur ?
- 2.9 Comment montrer qu'une famille est libre ou un système de vecteurs linéairement indépendants ?
- 2.10 Comment montrer qu'une famille est liée ou un système de vecteurs linéairement dépendants ?
- 2.11 Comment montrer qu'une famille est une base ?
- 2.12 Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel ?
- 2.13 Comment montrer qu'une application est linéaire ?
- 2.14 Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?

- 2.15 Comment montrer l'injectivité d'une application linéaire ?
- 2.16 Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?
- 2.17 Comment déterminer le rang d'une application linéaire ?
- 2.18 Comment montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme, isomorphisme, automorphisme ?
- 2.19 Comment montrer qu'une application linéaire est un projecteur ?
- 2.20 Comment montrer qu'une application linéaire est une symétrie ?

2.1 Comment montrer qu'une partie est stable par combinaison linéaire ?

Pour montrer qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est stable par combinaison linéaire, on montre que :

pour tous $u, v \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $u + \alpha \cdot v \in F$

E X E M P L E

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } x - 3y + z = 0\}$.

Montrons que F est stable par combinaison linéaire.

Soient $u = (x, y, z)$, $v = (a, b, c)$ des éléments de F , et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u + \alpha \cdot v &= (x, y, z) + (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b, \alpha \cdot c) \\ &= (x + \alpha \cdot a, y + \alpha \cdot b, z + \alpha \cdot c) \end{aligned}$$

On pose $x' = x + \alpha \cdot a$, $y' = y + \alpha \cdot b$ et $z' = z + \alpha \cdot c$, on a alors :

$$x' + y' = x + y + \alpha \cdot (a + b) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0 \text{ car } u, v \in F$$

et

$$\begin{aligned} x' - 3y' + z' &= (x + \alpha \cdot a) - 3 \cdot (y + \alpha \cdot b) + (z + \alpha \cdot c) \\ &= (x - 3 \cdot y + z) + \alpha \cdot (a - 3 \cdot b + c) \\ &= 0 + 0 = 0 \text{ car } u, v \in F \end{aligned}$$

donc $u + \alpha \cdot v \in F$ et par suite F est stable par combinaison linéaire.

Exercices

1. Dans les ensembles suivants sont-ils stables par combinaisons linéaire ?

- (a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 1\}$;
- (b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$;
- (c) $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| = 2|y|\}$;
- (d) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \neq 2|y|\}$;
- (e) $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y \geq 0\}$.

2. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ des suites numériques, les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-ils stables par combinaisons linéaires ?

- (a) E_1 l'ensemble des suites convergentes ;
- (b) E_2 l'ensemble des suites divergentes ;
- (c) E_3 l'ensemble des suites bornées.

2.2 Comment montrer qu'une partie est engendrée par une famille de vecteurs ?

Soient (a_i) une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ et F une partie de E .

Pour montrer que F est *engendrée* par (a_i) , on montre que :

$\forall u \in F, \exists a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 \cdot a_{k_1} + \lambda_2 \cdot a_{k_2} + \dots + \lambda_n \cdot a_{k_n}$$

Quand F est engendrée par (a_i) , on écrit $F = \text{Vect} \{a_i\}$.

EXEMPLE

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $(1, X, X(1 - X))$ une famille de vecteurs de E . On désigne par F l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Montrons que F est engendré par $(1, X, X(1 - X))$.

Soit $P \in F$, il existe alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$;

comme $P = c \cdot 1 + (b + a) \cdot X + (-a) \cdot X(1 - X)$, donc F est engendré par $(1, X, X(1 - X))$.

Exercices

1. L'ensemble $E = \mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Le vecteur $\vec{u} = (11, 10, -21)$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par $\vec{x} = (-1, 0, 2)$ et $\vec{y} = (-1, 4, 3)$?
 - (b) Déterminer m pour que $\vec{x} = (m, 2, -3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $\vec{a} = (1, 2, 3)$ et $\vec{b} = (-1, 0, 2)$;
 - (c) Soient les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 2)$, $\vec{u}' = (4, 9, 5)$ et $\vec{v}' = (4, 11, 7)$, montrer que les familles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E .
2. L'ensemble $E = \mathbb{R}^4$ étant muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Déterminer x et y pour que $(3, 2, x, y)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $(1, 4, -5, 2)$ et $(1, 2, 3, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
 - (b) Montrer que

$$\text{Vect} \{(3, 1, -2, 0), (-1, 0, 2, 1)\} = \text{Vect} \{(1, 1, 2, 2), (3, 2, 2, 3)\}.$$

2.3 Comment montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel en utilisant la définition ?

Pour montrer qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E , on montre que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} & F \neq \emptyset \\ & \text{et pour tous } u, v \in F \quad u + v \in F ; \\ & \text{pour tous } u \in F \text{ et } \alpha \in K, \quad \alpha \cdot u \in F. \end{aligned}$$

Ou encore : $F \neq \emptyset$ et pour tous $u, v \in F$ et $\alpha \in K$, $u + \alpha \cdot v \in F$.

EXEMPLE

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

On a :

- $0 + 2 \cdot 0 = 0$ et $0 + 0 + 0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in F$ et par suite $F \neq \emptyset$.
- Soient $u = (x, y, z)$, $v = (a, b, c)$ des éléments de F et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$u + \alpha \cdot v = (x, y, z) + \alpha \cdot (a, b, c) = (x + \alpha a, y + \alpha b, z + \alpha c);$$

on pose $x' = x + \alpha a$, $y' = y + \alpha b$ et $z' = z + \alpha c$; on a :

$$x' + 2y' = x + 2y + \alpha(a + 2b) = 0 + 0 = 0 \quad \text{car } u, v \in F$$

et

$$\begin{aligned} x' + y' + z' &= (x + \alpha a) + (y + \alpha b) + (z + \alpha c) \\ &= (x + y + z) + \alpha(a + b + c) \\ &= 0 + 0 = 0 \quad \text{car } u, v \in F \end{aligned}$$

donc $u + \alpha \cdot v \in F$ et par suite F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercices

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y + z = 0\}$;
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y + z = 1\}$;
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$;
4. $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| = 2|y|\}$?

2.4 Comment montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel en utilisant l'intersection ?

Pour montrer qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E , il suffit de montrer que F est une intersection de sous-espaces vectoriels de E .

EXEMPLE

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

On considère les ensembles suivants

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0\}$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

On sait que F_1, F_2 sont des droites vectorielles, par ailleurs $F = F_1 \cap F_2$, donc F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercices

1. Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n}$ une famille de scalaires. Montrer que l'ensemble E défini par :

$$E = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall i \in \{1, \dots, q\}, a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$;

2. Dans $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, on considère le sous-ensemble F de E défini par :

$$F = \{P \in E, P(1) + 2P'(1) = 0, P''(2) = P'(2) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel E ;

3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + 2y)^2 + (y + z)^2 = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel E ;

4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0, x - y = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel E .

2.5 Comment montrer qu'une partie est la somme de deux sous-espaces vectoriels ?

Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est somme de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de F , on montre que

$$\forall x \in F, \exists x_1 \in F_1, \exists x_2 \in F_2 \text{ tels que } x = x_1 + x_2.$$

E X E M P L E

Sur $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces vectoriels : $F = \mathbb{R}_3[X]$, $F_1 = \text{Vect}\{1, X\}$ et $F_2 = \text{Vect}\{X(X^2 - 1), X^2\}$. Montrer que $F = F_1 + F_2$.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un élément quelconque de F . On a :

$$\begin{aligned} P &= cX + d + a(X^3 - X) + bX^2 + aX \\ &= (d + (c + a)X) + (aX(X^2 - 1) + bX^2) \end{aligned}$$

et soit $P_1 = (d + (c + a)X)$ et $P_2 = (aX(X^2 - 1) + bX^2)$;

on a donc $P_1 \in F_1$, $P_2 \in F_2$ et $P = P_1 + P_2$ et par suite $F = F_1 + F_2$.

Exercices

1. Dans $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on considère les ensembles suivants

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\} \text{ et } G = \{ f \in E, f \text{ constante} \}.$$

Montrer que $E = F + G$.

2. Soient $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, A un polynôme de degré n , $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \{P \in E, P = 0 \text{ ou } \deg(P) \leq n - 1\}$ et soit $F = \{QA, Q \in E\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ;

(b) Montrer que $E = F + \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Soient $E = S(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites numériques muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $F = S_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de E constitué des suites convergentes, N le sous-ensemble de E constitué des suites convergentes vers 0 et G l'ensemble des suites constantes.

(a) Montrer que F , N et G sont des sous-espaces vectoriels de E ;

(b) Montrer que $F = N + G$.

2.6 Comment montrer qu'une partie est un espace vectoriel?

Pour montrer qu'une partie $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

E X E M P L E

Soit $T > 0$. Montrer que l'ensemble $F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions périodiques définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel (muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel).

On sait que $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Montrons que $F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

- La fonction nulle est une fonction T -périodique, donc $F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est non vide ;
- Soient $f, g \in F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. A-t-on $f + \alpha \cdot g \in F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(f + \alpha \cdot g)(x + T) &= f(x + T) + (\alpha \cdot g)(x + T) \\ &= f(x) + \alpha g(x + T) \\ &= f(x) + \alpha g(x) \\ &= (f + \alpha \cdot g)(x)\end{aligned}$$

donc $f + \alpha \cdot g \in F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

Par suite $F_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercices

1. Démontrer que l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\exists K_f > 0, \forall x, x' \in [0, 1], \quad |f(x) - f(x')| \leq K_f |x - x'|$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel).

2. Démontrer que l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$. Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

2.7 Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ?

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels E_1, E_2 d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sont *supplémentaires*, on montre que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ et $E = E_1 + E_2$.

On dit aussi que E est *somme directe* de E_1 et de E_2 et on note $E = E_1 \oplus E_2$.

E X E M P L E

Dans $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels, on considère l'ensemble $E_1 = \{f \in E, \deg(f) \leq 1\}$ et $E_2 = \text{Vect}\{f_1, f_2\}$ où $f_1 : x \mapsto x^2 - x$ et $f_2 : x \mapsto x^3 + x^2$.

Montrons que E_1, E_2 sont supplémentaires dans E .

- Soit $f \in E_1 \cap E_2$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b = c(x^2 - x) + d(x^3 + x^2).$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $dx^3 + (d + c)x^2 + (-a - c)x - b = 0$, d'où $d = 0$, $(d + c) = 0$, $(-a - c) = 0$ et $b = 0$ ou encore $a = b = c = d = 0$.

C'est-à-dire $f = 0_E$ et par conséquent $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

- Soit $f \in E$, donc il existe $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha(x^3 + x^2) - \alpha x^2 + \beta(x^2 - x) + \beta x + \gamma x + \lambda$$

On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ((\beta + \gamma - \alpha)x + \lambda) + (\alpha(x^3 + x^2) + (\beta - \alpha)(x^2 - x)).$$

Considérons g, h les éléments de E définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (\beta + \gamma - \alpha)x + \lambda \text{ et } h(x) = \alpha(x^3 + x^2) + (\beta - \alpha)(x^2 - x).$$

On a $g \in E_1$, $h \in E_2$ et $f = g + h$, d'où $E = E_1 + E_2$, par suite $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercices

1. Montrer que le sous-espace vectoriel des fonctions paires et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires sont supplémentaires dans l'espace vectoriel des fonctions.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 144.

2.8 Comment montrer qu'une famille est génératrice ou un système générateur ?

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Pour montrer que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une *famille génératrice de E* , on montre que tout élément u de E est combinaison linéaire de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ c'est-à-dire :

$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } u = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n.$$

EXEMPLE

Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels), on considère les fonctions g_1, g_2, g_3 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = x^2 + 1, \quad g_2(x) = 2x \quad \text{et} \quad g_3(x) = x^2 - 1.$$

Montrer que (g_1, g_2, g_3) est une famille génératrice de E .

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un élément quelconque de E , on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = \lambda_1(x^2 + 1) + \lambda_2 2x + \lambda_3(x^2 - 1).$$

On obtient $a = \lambda_1 + \lambda_3$, $b = 2\lambda_2$, $c = \lambda_1 - \lambda_3$

d'où $\lambda_1 = \frac{a+c}{2}$, $\lambda_2 = \frac{b}{2}$, $\lambda_3 = \frac{a-c}{2}$.

Exercices

1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, les vecteurs suivants forment-ils une famille génératrice ?
 - (a) $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 5)$;
 - (b) $\vec{a} = (3, 3)$, $\vec{b} = (0, 7)$, $\vec{c} = (-2, 5)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels, les vecteurs suivants forment-ils une famille génératrice ?
 - (a) $P = 1$, $Q = X$ et $R = X(X - 1)$;
 - (b) $P = 2X^2 - 5$, $Q = 7X$ et $R = 3X^2 + 4$.

2.9 Comment montrer qu'une famille est libre ou un système de vecteur linéairement indépendants ?

Pour montrer qu'une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est *libre*, on montre que :

pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

EXEMPLE

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, -2, 0)$ et $u_2 = (0, 3, -1)$.

Montrer que (u_1, u_2) est une famille libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 = (0, 0, 0)$. A-t-on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow (\lambda_1, -2\lambda_1 + 3\lambda_2, -\lambda_2) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

et par suite (u_1, u_2) est une famille libre.

Exercices

1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants sont-ils indépendants ?

(a) $\vec{A} = (0, 1, 3)$, $\vec{B} = (2, 0, -1)$ et $\vec{C} = (2, 0, 1)$;

(b) $\vec{A'} = (-1, 1, 1)$, $\vec{B'} = (1, -1, 1)$ et $\vec{C'} = (1, 1, -1)$;

(c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ et $\vec{w} = (0, 7, 7)$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 2, 3, 0), \vec{v} = (-2, 3, 5, 4), \vec{w} = (8, -5, -9, -12)$$

(a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre $\mathbb{R}^4$?

(b) Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que les trois vecteurs $\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}$ suivants

$$\vec{u'} = (0, 2, 3, 5), \vec{v'} = (1, 1, 2, 4), \vec{w'} = (2, 4, m, 13)$$

soient linéairement indépendants.

2.10 Comment montrer qu'une famille est liée ou un système de vecteurs linéairement dépendants ?

Pour montrer qu'une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est *liée*, on montre qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls* tels que

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0_E.$$

E X E M P L E

Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels), on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = x^2 - 1$ et $f_3(x) = x^2$.

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est liée.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$;

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lambda_1(x^2 + 1) + \lambda_2(x^2 - 1) + \lambda_3 x^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda_3}{2}$.

Il y a donc une infinité de solutions $\left(-\frac{\lambda_3}{2}, -\frac{\lambda_3}{2}, \lambda_3\right)$ avec λ_3 réel arbitraire ;

Il y a, en particulier, $(1, 1, -2)$ (en prenant $\lambda_3 = -2$) : $f_1 + f_2 - 2f_3 = 0$.

Par suite (f_1, f_2, f_3) est liée.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ montrer que les vecteurs suivants forment une famille liée.
 - (a) $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (1, 3)$ et $\vec{w} = (2, 5)$;
 - (b) $\vec{x} = (0, 1)$, $\vec{y} = (1, 1)$ et $\vec{z} = (2, 3)$.
2. Soit a un nombre réel. Pour quelles valeurs de a , les vecteurs :

$$(a + 2, a, a - 2), (1, a, -1), (a, -a, 1)$$

forment-ils une famille liée de $\mathbb{R}^3$?

2.11 Comment montrer qu'une famille est une base ?

Pour montrer qu'une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est une *base* de E , on montre que $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est à la fois libre et génératrice.

E X E M P L E

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 5)$.

Montrons que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet :

Soit $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$. On a :

$$\begin{aligned}\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} &\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (2\alpha - \beta, 3\alpha + 5\beta) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\alpha - \beta \\ x_2 = 3\alpha + 5\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 = 10\alpha - 5\beta \\ x_2 = 3\alpha + 5\beta \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \alpha = \frac{1}{13}(5x_1 + x_2) \text{ et } \beta = 2\alpha - x_1 = \frac{1}{13}(-3x_1 + 2x_2).$$

2. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. En effet :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \vec{0}$, montrons que $\alpha = \beta = 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow (2\alpha - \beta = 0 \text{ et } 3\alpha + 5\beta = 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10\alpha - 5\beta = 5 \cdot 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{1}{13}(5 \cdot 0 + 0) = 0 \text{ et } \beta = 2\alpha - x_1 = 2 \cdot 0 - 0 = 0.$$

Exercices

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = (2, 3, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ et $\vec{w} = (-1, 3, 5)$. Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$;
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (3, 3)$, $\vec{v} = (0, 7)$ et $\vec{w} = (-2, 5)$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

2.12 Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel ?

Pour montrer qu'un espace vectoriel E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve une base de E qui a n éléments.

Dans ce cas on note $\dim(E) = n$.

Par convention on pose $\dim(\{0_E\}) = 0$.

E X E M P L E

1. **L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ a pour dimension 2.**

Car la famille $((0, 1), (1, 0))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

2. **Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$. Déterminer la dimension de E .**

Soit $u = (x, y, z)$ un élément quelconque de E , donc $x = 2y - z$, on en déduit que $u = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$ et par suite, les vecteurs $u_1 = (2, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$ forment une famille génératrice de E , par ailleurs (u_1, u_2) est libre, par conséquent (u_1, u_2) est une base de E ,

d'où $\dim(E) = 2$.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble F_1 des triplets de la forme : $x_1 = (a, -b, a + b)$ où a et b sont des nombres réels quelconques, et F_2 l'ensemble des triplets de la forme : $x_2 = (k, 2h + k, -2h)$ où h et k sont des nombres réels quelconques.
 - (a) Démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et indiquer une base et la dimension de chacun d'eux ;
 - (b) Déterminer $F_1 \cap F_2$ et sa dimension m ;
 - (c) Déterminer $F_1 + F_2$ et sa dimension n ;
 - (d) Vérifier que $\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.
2. Mêmes questions que l'exercice 1, avec : F_1 étant l'ensemble des triplets $x_1 = (a - b, 2a, 3a + 2b)$ où a et b sont des nombres réels quelconques, F_2 ensemble des triplets $x_2 = (h, h + k, h + 2k)$ où h et k sont des nombres réels quelconques.

2.13 Comment montrer qu'une application est linéaire ?

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit f une application de E dans F .

Pour montrer que f est *linéaire*, on montre que les propriétés suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \text{ on a : } f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \text{ on a : } f(\alpha x) &= \alpha f(x)\end{aligned}$$

Ou encore :

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \text{ on a : } f(u + \alpha v) = f(u) + \alpha f(v)$$

E X E M P L E

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

Montrer que f est une application linéaire.

Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme $u + \alpha v = (x + \alpha x', y + \alpha y', z + \alpha z')$,

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}f(u + \alpha v) &= ((x + \alpha x') - (y + \alpha y'), (y + \alpha y') + 2(z + \alpha z')) \\ &= ((x - x') + \alpha (y - y'), y + 2z + \alpha (y' + 2z')) \\ &= (x - x', y + 2z) + (\alpha (y - y'), \alpha (y' + 2z')) \\ &= f(u) + \alpha (y - y', y' + 2z') \\ &= f(u) + \alpha f(v) ;\end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercices

1. On considère les applications suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont linéaires ?

- (a) $f : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$;
- (b) $g : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y + 1)$;
- (c) $h : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
- (d) $k : (x, y) \mapsto (x + y, x + y^2)$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = P(1)$. Montrer que f est une application linéaire.

2.14 Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Pour trouver le *noyau* de f , on résout l'équation $f(x) = 0_F$. Ainsi :

$$\text{Ker } f = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

On note que $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .

E X E M P L E

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z).$$

On sait que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ (voir méthode 13).

Déterminer le noyau de f .

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow (x - y, y + 2z) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{1}{2}y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = y \left(1, 1, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

et donc $\text{Ker } f = \text{Vect} \left\{ \left(1, 1, -\frac{1}{2} \right) \right\}$.

Exercices

1. Montrer que les applications suivantes de $(\mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2)$ sont linéaires ; déterminer leurs noyaux.

(a) $U(x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$;

(b) $U(x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

2. Mêmes questions que 1) pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous :

(a) $U(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$;

(b) $U(x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

2.15 Comment montrer l'injectivité d'une application linéaire ?

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F .

Pour montrer que f est *injective*, il suffit de montrer que : $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

En fait, on a : f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } (f) = \{0_E\}$.

E X E M P L E

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, y + x).$$

On vérifie facilement que f est linéaire.

Montrer que f est injective.

On a :

$$\begin{aligned} u = (x, y) \in \text{Ker } (f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow (x - y, y + x) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$,

et par suite f est injective.

Exercices

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - 2y, y + x + 2z).$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

f est-elle injective ?

2. Même exercice pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définies ci-dessous :

(a) $U(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$;

(b) $U(x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

2.16 Comment déterminer l'image d'une application linéaire ?

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Pour trouver l'image de f , on détermine l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f . Ainsi $\text{Im}(f) = \{f(u), u \in E\}$.

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

E X E M P L E

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par

$$f(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{k}, \quad f(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}, \quad f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}.$$

Déterminer l'image de f .

Comme $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\}$ et $f(\vec{k}) = f(\vec{j}) - f(\vec{i})$, il s'en suit que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(\vec{i}), f(\vec{j})\}$ ou encore $\text{Im}(f) = \{x(-\vec{i} + \vec{k}) + y(\vec{j} + \vec{k}), x, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercices

1. Montrer que les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont linéaires ; déterminer leurs images.

(a) $U(x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$;

(b) $U(x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

2. Même exercice pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous :

(a) $U(x, y, z) = (x + y + z, y, z)$;

(b) $U(x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

3. Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$f(P) = X^2 P' - X P.$$

On sait que f est une application linéaire. Déterminer son image.

4. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire et déterminer son image.

2.17 Comment déterminer le rang d'une application linéaire ?

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Pour trouver le *rang* de f , on détermine l'image de f , puis on calcule sa dimension. On a : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im} f)$.

Si E est de *dimension finie*, on a le théorème du rang :

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

E X E M P L E

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y).$$

On vérifie facilement que f est linéaire.

Trouvons le rang de f .

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x, y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(4x - 2y, 6x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x - y)(2, 3), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(2, 3), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 3)\} \end{aligned}$$

Le vecteur $(2, 3)$ est une base de $\text{Im}(f)$,

et par suite $\text{rg}(f) = 1$.

Exercices

1. Soit f l'application de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui associe au vecteur (x, y, z) le vecteur $(y + z, x + z, x + y)$. Déterminer le rang de f .
2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{k}, \quad f(\vec{j}) = \vec{j} + 2\vec{k}, \quad f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Déterminer le rang de f .

3. Soit E_3 le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et soit f l'application définie sur E_3 par :

$$f(P) = X^2 P'' - 4XP' + 6P.$$

- (a) Montrer que f est un endomorphisme de E ;
- (b) Déterminer le rang de f .

2.18 Comment montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme, isomorphisme, automorphisme ?

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F .

Pour montrer que f est un isomorphisme, on montre que f est bijective.

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E .

Un automorphisme de E est une isomorphisme de E dans E .

EXEMPLE

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (x - y, y + x)$

Montrons que f est un automorphisme.

f est une application linéaire injective (voir fiche 15), f est surjective. En effet, soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (x', y')$. On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (x', y') &\Leftrightarrow (x - y, y + x) = (x', y') \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = x' \\ y + x = y' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x' + y' \\ 2y = y' - x' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2} \\ y = \frac{y' - x'}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe donc bien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (x', y')$, d'où f est surjective. f est une application linéaire à la fois injective et surjective, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercices

1. Montrer que les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies ci-dessous sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$.
 - (a) $U(x, y) = (x + y, x)$;
 - (b) $U(x, y) = (5x - 4y, 6x + 5y)$.
2. Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Montrer que l'application φ de $E \times F$ dans $E \times F$ définie par : $\varphi(x, y) = (x, y + f(x))$ est un automorphisme de $E \times F$.

2.19 Comment montrer qu'une application linéaire est un projecteur ?

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Pour montrer que f est un *projecteur*, on montre que :

- Soit $f \circ f = f$
- Soit $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires et que :

$$\forall x \in \text{Im}(f), \quad f(x) = x.$$

On dira que f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker } f$.

E X E M P L E

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$f(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y).$$

On vérifie que f est une application linéaire.

Montrons que f est un projecteur.

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (f \circ f)(u) &= (f \circ f)(u) \\ &= f(4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= (4(4x - 2y) - 2(6x - 3y), 6(4x - 2y) - 3(6x - 3y)) \\ &= (16x - 12x - 8y + 6y, 24x - 18x - 12y + 9y) \\ &= (4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= f(u) \end{aligned}$$

donc $f \circ f = f$ et par suite f est un projecteur.

Exercices

1. Le plan vectoriel V_2 étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application linéaire f de V_2 dans V_2 définie par :

$$f(\vec{i}) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}, \quad f(\vec{j}) = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$$

- (a) Démontrer que f est un projecteur ;
- (b) Déterminer l'image et le noyau de f ;
- (c) Vérifier que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans V_2 et que :
 $\forall x \in \text{Im}(f), \quad f(x) = x.$

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 144.

2.20 Comment montrer qu'une application linéaire est une symétrie ?

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Pour montrer que f est une *symétrie*, on montre que :

- Soit $f \circ f = \text{Id}_E$
- Soit $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires.

On dira que f est la symétrie de E par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

E X E M P L E

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $f(x, y) = (y, x)$. On vérifie facilement que f est une application linéaire.

Montrons que f est une symétrie.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(f \circ f)(x, y) = f(f(x, y)) = f(y, x) = (x, y)$$

donc $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, et par suite f est une symétrie.

Exercices

1. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p un projecteur de E . On pose $s = 2p - \text{Id}_E$. Montrer que s est une symétrie.
2. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_1 - e_2$, $f(e_2) = 3e_1 - 2e_2$.
 - (a) Démontrer que f est une symétrie de E ;
 - (b) Trouver $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.
3. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 5e_1 + 8e_2 - 10e_3$$

$$f(e_2) = -8e_1 - 15e_2 + 20e_3$$

$$f(e_3) = -4e_1 - 8e_2 + 11e_3.$$

- (a) Démontrer que f est une symétrie de E ;
- (b) Trouver $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.